Baccalauréat C Limoges juin 1978

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Une urne contient 3 boules blanches et 2 boules noires, chaque boule ayant même probabilité d'être tirée.
On tire successivement 3 boules en remettant la boule après tirage si celle-ci est noire et en ne remettant pas la boule après tirage si celle-ci est blanche.
On appelle X la variable aléatoire qui à chaque tirage de 3 boules associe le nombre de boules blanches obtenues.
Déterminer la loi de probabilité de X puis calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de X.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormé direct $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$.
On considère l'application f de P dans P qui au point m d'affixe z associe le point M d'affixe Z où :

$$Z = \left(2 + \frac{3}{2}\text{i}\right)z - \frac{5}{2}\text{i}\overline{z},$$

$\overline{z}$ désignant le nombre complexe conjugué de z.

1. Calculer les coordonnées $(X~;~Y)$ de M en fonction des coordonnées $(x~;~y)$ de m.
   Quel est l'ensemble des points M?
2. Calculer le module de Z en fonction de x et y.
   Trouver et dessiner l'ensemble des points m tels que $|Z| = \sqrt{5}$.
3. Trouver et dessiner l'ensemble des points m tels que O, m et M soient alignés.

PROBLÈME **12 POINTS**

Soit le plan affine euclidien P rapporté à un repère orthononné $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ d'axes $x'\text{O}x$, $y'\text{O}y$.

Partie A

Soit la fonction numérique f_1 de la variable réelle x définie par

$$f_1(x) = \sqrt{\frac{1}{3}x(x-6)}.$$

Étudier les variations de f_1 et construire sa courbe représentative $(\mathcal{C}_1)$ dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.
On montrera que la courbe $(\mathcal{C}_1)$ admet un axe de symétrie et on précisera les tangentes à $(\mathcal{C}_1)$ aux points d'abscisses 0 et 6.

Partie B

On considère l'ensemble des fonctions numériques g_m de variable réelle x définies par

$$g_m(x) = \text{Log}\sqrt{\frac{1}{3}x(x-6m)}$$

avec m réel strictement positif. On notera (Γ_m) la courbe représentative de g_m dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Montrer que (Γ_1) courbe représentative de g_1 :

$$g_1(x) = \text{Log}\sqrt{\frac{1}{3}x(x-6)}.$$

admet un axe de symétrie.

Etudier les variations de g_1 et construire (Γ_1) dans le repère $\left(\text{O}\,;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ après avoir étudié les branches infinies.

b. Calculer $I\displaystyle\int_a^b g_1(x)\,\text{d}x$ (a et b étant deux réels strictement supérieurs à 6).

En déduire l'aire du domaine plan limité par l'axe $x'\text{O}x$, (Γ_1) et les droites d'équation $x = x_0$ et $x = 9$. (x_0 étant l'abscisse positive de l'un des points d'intersection de (Γ_1) avec $x'\text{O}x$).

2. On considère dans P l'application T_m qui au point M de coordonnées $(x\,;\ y)$ associe le point $T_m(M)$ de coordonnées $\left(x' = mx\,;\ y' = y + \text{Log}\,m\right)$, ($m$ étant le réel strictement positif choisi précédemment).

a. Montrer que T_m est une application affine. Est-elle bijective ? Peut- m , elle être une isométrie ?

b. Montrer que $T_m(\Gamma_1) = (\Gamma_m)$.

c. Déterminer la structure de l'ensemble F des applications T_m muni de la loi de composition des applications.

d. Montrer qu'il existe une application appartenant à l'ensemble F par laquelle deux courbes quelconques (Γ_α) et $\left(\Gamma_\beta\right)$ se déduisent l'une de l'autre.

Partie C

1. Soit la fonction numérique f_2 de la variable réelle x définie par

$$f_2(x) = -f_1(x).$$

Construire la courbe représentative $(\mathscr{C}_2)$ de f_2 dans le repère $\left(\text{O}\,;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ du A.

Montrer que la courbe (H) définie par $(H) = (\mathscr{C}_1) \cup (\mathscr{C}_2)$ a pour équation

$$x^2 - 6x - 3y^2 = 0.$$

En déduire la nature, le centre et les coordonnées des foyers de (H).

2. On considère dans P la transformation S qui à tout point M de coordonnées $(x\,;\ y)$ associe le point $S(M) = M'$ de coordonnées

$$x' = -\sqrt{3}x + y \quad ; \quad y' = -x - \sqrt{3}y.$$

À tout point M de P on fait correspondre le nombre complexe $Z = x + \text{i}y$ affixe de M.

a. Exprimer Z' affixe de M' en fonction de Z. Déterminer S et ses éléments caractéristiques.

b. Déterminer l'équation cartésienne de la courbe $(H') = S(H)$.

c. On considère le point $M_0(1\,;\,0)$ et la suite des points

$$M_1 = S(M_0), \quad \ldots, \quad \ldots, \quad M_n = S(M_{n-1}).$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}, \quad M_n = (\mathscr{H}_n \circ R^n)(M_0)$.

$\mathscr{H}$ étant une homothétie de centre O dont on déterminera le rapport, R étant une rotation de centre O dont on déterminera l'angle.

En déduire que M_n est transformé de M_0 par une similitude que l'on caractérisera.

En déduire les coordonnées de M_n en fonction de n.