

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Limoges juin 1979 ∞

EXERCICE 1

3 points

Montrer que pour tout n élément de \mathbb{N} , $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11.

EXERCICE 2

5 points

On considère la fonction numérique f définie sur \mathbb{R} par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \bullet \text{ pour } x \leq -\frac{1}{2} & f(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \\ \bullet \text{ pour } -\frac{1}{2} \leq x < 1 & f(x) = \frac{4}{e^2} \\ \bullet \text{ pour } x \geq 1 & f(x) = \frac{4}{e^2} + \log x \end{array} \right.$$

e étant la base des logarithmes.

1. Étudier la continuité de f sur \mathbb{R} .
Déterminer l'ensemble des réels pour lesquels f est dérivable
2. Étudier les variations de la fonction f et tracer sa courbe représentative (\mathcal{C}) dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$. (unité : 2 cm). :1. Calculer l'aire du domaine limité par (\mathcal{C}), l'axe $x'Ox$ et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 2$. En donner une valeur approchée avec 2 décimales.

On donne :

| x | e^x | e^{-x} | $e^{\frac{1}{x}}$ | $e^{-\frac{1}{x}}$ | $\log x$ |
|-----|---------|----------|-------------------|--------------------|----------|
| 2 | 7,389 1 | 0,135 3 | 1,648 7 | 0,606 5 | 0,693 1 |

PROBLÈME

12 points

Partie A

On considère l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes, un plan affine euclidien orienté P muni d'un repère orthonormé, direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et un réel arbitraire m .

Soit l'application F_m de \mathbb{C} dans \mathbb{C} qui, à tout complexe α associe le complexe α' défini par $\alpha' = m\alpha + 1$ et l'application f_m de P dans P qui, à tout point M d'affixe α , associe le point M' d'affixe $\alpha' = m\alpha + 1$.

1. Discuter suivant la valeur du réel m la nature de f_m .
Préciser dans chaque cas ses éléments géométriques caractéristiques.
2. Soit la conique (C) du plan P d'équation

$$x^2 + 2y^2 - 2x = 0.$$

Soit (C'_m) l'image de (C) par f_m , m étant dans cette question un réel non nul.

Donner l'équation de (C'_m) . Préciser la nature de (C) et de (C'_m) .

Tracer sur une même figure (C) et (C'_m) .

Démontrer que les foyers de (C'_m) sont les images par f_m des foyers de (C).

3. Soit ω_m le point de P invariant par f_m (m réel quelconque). On pose

$$m = \operatorname{tg} \varphi \quad \text{avec} \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$$

Montrer que les coordonnées de ω_m s'expriment sous la forme :

$$\begin{cases} x &= \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \\ y &= \frac{\sin 2\varphi}{2} \end{cases}$$

Déterminer l'ensemble des points ω_m quand φ varie dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. Préciser la nature de cet ensemble.

4. On considère dans le plan P muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un point mobile N . Ses coordonnées sont données en fonction du temps t par

$$x = \frac{1}{1+t^2} \quad \text{et} \quad y = \frac{t}{1+t^2} \quad \text{avec} \quad t \in [-1; +1].$$

En utilisant les résultats de la question précédente, préciser la trajectoire de N et la construire. Construire sur la même figure les vecteurs vitesse et accélération aux dates $t = 1$ et $t = -1$.

Décrire le mouvement entre les dates $t = -1$ et $t = 1$ et préciser les intervalles de temps pendant lesquels le mouvement est accéléré ou retardé.

Partie B

E est un espace affine euclidien de dimension 3 muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Le plan P de la partie A est le plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit g_m l'application de E dans E qui, à tout point M de E de coordonnées $(x; y; z)$, associe le point M' de coordonnées $(x'; y'; z')$ définies par

- $F_m(x + iy) = (x' + iy')$
(F_m étant l'application de \mathbb{C} dans \mathbb{C} définie au début de la partie A).
- et par $z' = mz$.

Dans toute cette partie m est un réel non nul.

1. Donner la définition analytique de g_m .
2. Déterminer l'image par g de l'hyperbole (H) du plan de repère (O, \vec{j}, \vec{k}) qui a pour équation dans ce repère $y^2 - z^2 = 1$.
Tracer l'hyperbole (H) et son image $g_m(H)$ chacune dans un repère convenable à préciser.
3. Démontrer que g_m est la composée dans un ordre quelconque de l'homothétie de centre ω_m et de rapport m et d'une rotation que l'on précisera (ω_m étant le point de P défini au 3. A).