Baccalauréat C Limoges juin 1981

EXERCICE 1

Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} (\pi - |2x-\pi|)\sin x\,\mathrm{d}x$.

EXERCICE 2

Soit un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$ d'un espace affine $\mathcal{E}$.

1. Soit s la symétrie orthogonale par rapport au plan P dont une équation est :

$$y+3z-5=0.$$

   Étant donné un point M de $\mathcal{E}$ de coordonnées $(x~;~y~;~z)$, calculer les coordonnées $\left(x'~;~y'~;~z'\right)$ de son image M' par s.

2. On considère l'application f de l'espace affine $\mathcal{E}$ qui, à tout point M, de coordonnées $(x~;~y~;~z)$ par rapport au repère $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$, associe le point M'', dont les coordonnées $\left(x''~;~y''~;~z''\right)$. sont données par les relations

$$\left\{\begin{array}{l c l}
x'' &=& x~;\\
y'' &=& \dfrac{-4y+3z-3}{5}~;\\
z'' &=& \dfrac{3y+4z+1}{5}.
\end{array}\right.$$

   Montrer que f est une isométrie involutive. Préciser sa nature et ses éléments remarquables.

3. Trouver la nature et les éléments remarquables de $f\circ s$ par des remarques géométriques simples.

PROBLÈME

Soit θ un réel de l'intervalle $]-\pi~;~\pi]$. On considère les suites $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes vérifiant :

$$(1)\qquad \forall n\in\mathbb{N},\quad Z_{n+2}-2Z_{n+1}\cos\theta+Z_n=0$$

On donne d'autre part un plan affine euclidien $\mathcal{P}$ de repère orthonormé $\left(\mathrm{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$. Le nombre Z_n est représenté par le point M_n de coordonnées x_n et y_n ; x_n et y_n désignent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de Z_n.

Partie A

Pour les constructions demandées dans cette partie, on prendra

$$Z_0=3+\mathrm{i},\quad Z_1=1+2\mathrm{i}.$$

1. On suppose dans cette question $\theta=0$. Construire les points M_0, M_1, M_2, M_3. Démontrer que la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison.
   Calculer $\overrightarrow{M_0M_n}$ en fonction de $\overrightarrow{M_0M_1}$ et n.
2. On suppose dans cette question $\theta=\dfrac{\pi}{3}$. Construire les points $M_0, M_1, M_2, \cdots, M_6$.
   Montrer que la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique.

3. On suppose dans cette question $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$. Construire les points M_0, M_1, M_2, M_3.

   Montrer que quel que soit n, le point O est isobarycentre de M_{n+1}, M_{n+2}.

   Montrer que $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique.

4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 - 2Zcos\theta + 1 = 0$. On appelle α et β ses racines. Montrer que si $\forall n$, $Z_n = \lambda\alpha^n + \mu\beta^n$ avec λ et μ complexes quelconques, alors la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation (1).

Partie B

On prend dans cette partie

$$\forall n \in \mathbb{N},\ Z_n = \lambda(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta) + m\overline{\lambda}(\cos n\theta - \mathrm{i}\sin n\theta)$$

où λ est un complexe donné non nul, $\lambda = a + \mathrm{i}b$ avec a et b réels, $\overline{\lambda}$ son conjugué et m un réel donné.

1. Remarquer que la suite (Z_n) vérifie la relation (1).
2. Calculer X_n et Y_n en fonction de a, b, m, θ.
3. Exprimer $\cos n\theta$ et $\sin n\theta$ en fonction de x_n et x_n pour $m \neq 1$ et $m \neq -1$.
4. Montrer que si m est différent de 1 et -1, les points M_n appartiennent à une conique qu'on précisera. La construire pour $\lambda = 3 + 4\mathrm{i}$ et $m = 1/2$.
5. Montrer que si $m = 1$ alors Z_n est réel. Exprimer dans ce cas Z_n en fonction de a, b, θ. Préciser Z_n dans le cas où $\lambda = 1$ puis $\lambda = \mathrm{i}$.

Partie C

On désigne par $(\mathscr{E}, +, \cdot)$ l'espace vectoriel des suites réelles et par $\mathscr{E}'$ l'ensemble des suites réelles qui vérifient la relation (1).

1. Montrer que $\mathscr{E}'$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. On considère l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{E}' & \to & \mathbb{R}^2 \\ (U_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (U_0,\ U_1). \end{array}$$

   Montrer que cette application est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Quelle est la dimension de $\mathscr{E}'$?

3. Montrer que si $\theta \neq 0$ et $\theta \neq \pi$, la question B 5. fournit deux suites linéairement indépendantes de $\mathscr{E}'$. En déduire la forme générale des suites de $\mathscr{E}'$.
4. Retrouver, pour $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ et $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$ les périodes obtenues en A.