

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C juin 1982 Limoges ∞

EXERCICE 1

4 points

Déterminer les paires $\{a, b\}$ d'entiers naturels non nuls tels que

$$2m + 7d = 111,$$

m désignant le PPCM et d le PGCD de a et de b .

EXERCICE 2

4 points

1. Montrer que, pour tout nombre réel x , on a

$$\cos 3x = (2 \cos 2x - 1) \cos x.$$

2. Pour tout entier naturel non nul n , on pose

$$S_n(\theta) = \text{Log} \left(2 \cos \frac{\theta}{3} - 1 \right) + \text{Log} \left(2 \cos \frac{\theta}{3^2} - 1 \right) + \dots + \text{Log} \left(2 \cos \frac{\theta}{3^n} - 1 \right).$$

où Log désigne le logarithme népérien et θ un nombre réel donné de l'intervalle $I = \left] -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3} \right[$.

a. Justifier l'existence de $S_n(\theta)$.

b. En utilisant la première question, montrer que

$$S_n(\theta) = \text{Log} \cos \frac{\theta}{2} - \text{Log} \cos \frac{\theta}{2 \cdot 3^n}$$

c. Calculer $S(\theta) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(\theta)$.

3. Calculer $S'(\theta)$, pour tout θ de l'intervalle I , S' désigne la dérivée de S . En déduire la valeur de J

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \text{tg} \frac{\theta}{2} d\theta.$$

PROBLÈME

12 points

On considère E un espace vectoriel euclidien orienté, muni de la base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On note f_0 l'identité de E .

Partie A

Soit f l'endomorphisme de E défini par

$$\begin{cases} f(\vec{i}) &= \vec{j} + \vec{k} \\ f(\vec{j}) &= \vec{i} + \vec{k} \\ f(\vec{k}) &= \vec{i} + \vec{j}. \end{cases}$$

1. Déterminer $f \circ f$ et vérifier que

$$f \circ f = f + 2f_0.$$

En déduire que f est une bijection et déterminer f^{-1} en fonction de f et de f_0 .

2. Soit $f^n = f^{n-1} \circ f \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que f^n peut s'écrire

$$f^n = \mathcal{U}_n f + \mathcal{V}_n f_0$$

\mathcal{U}_n et \mathcal{V}_n étant deux réels.

Calculer \mathcal{U}_{n+1} et \mathcal{V}_{n+1} en fonction de \mathcal{U}_n et \mathcal{V}_n .

3. Soit

$$\begin{cases} \alpha_{n+1} = 2\mathcal{U}_{n+1} + \mathcal{V}_{n+1} \\ \beta_{n+1} = \mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{V}_{n+1} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Exprimer α_{n+1} en fonction de α_n puis β_{n+1} en fonction de β_n .

Calculer α_n et β_n en fonction de n .

En déduire \mathcal{U}_n et \mathcal{V}_n en fonction de n et f^n en fonction de f et f_0 .

Partie B

Soit $\varphi_{a,b}$ l'endomorphisme de E défini par

$$\varphi_{a,b} = af_0 + bf.$$

On note Φ l'ensemble de ces endomorphismes avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

1. Montrer que Φ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des endomorphismes de E et que (f_0, f) est une base de Φ .
2. Quels sont les endomorphismes $\varphi_{a,b}$ tels que

$$\varphi_{a,b} \circ \varphi_{a,b} = \varphi_{a,b} + 2f_0.$$

3. Montrer que $(\Phi, +, \circ)$ est un anneau commutatif unitaire.
4. Déterminer les couples (a, b) de \mathbb{R}^2 pour lesquels
 - a. $\varphi_{a,b}$ est une symétrie vectorielle de E. Caractériser les symétries trouvées.
 - b. $\varphi_{a,b}$ est une projection vectorielle de E. Caractériser les projections trouvées.
 - c. $\varphi_{a,b}$ est une isométrie vectorielle de E. Caractériser les isométries trouvées.

La partie B est indépendante de A § 2) § 3).