

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Limoges septembre 1969 ∞

EXERCICE 1

On donne la fonction f telle que

$$f(x) = e^{2x} - 2x.$$

1. Étudier ses variations.
2. La représenter graphiquement.

EXERCICE 2

1. Dans le plan complexe, construire les points d'affixes :

$$a = 2 - i; \quad b = -3 - i; \quad c = -2 + 6i.$$

Calculer sous forme cartésienne les quotients $\frac{b}{a}$ et $\frac{c}{a}$ et construire leurs images.

2. Résoudre, dans le corps des complexes, l'équation

$$(2 - i)z^2 - (3 + i)z - 2 + 6i = 0.$$

Construire les images des racines.

PROBLÈME

Étant donné un plan Π , on considère le cercle (C) de ce plan, de centre O et de rayon R, et un diamètre AB de ce cercle.

On appelle Π^* le plan privé de la droite AB ainsi que des droites (α) et (β) respectivement perpendiculaires en A et B à AB.

On définit une transformation ponctuelle T de la manière suivante : à tout point M de Π^* on fait correspondre le point M' , intersection de la perpendiculaire à AB passant par M et de la polaire de M par rapport au cercle (C).

1. On appelle I le point d'intersection des polaires de M et M' par rapport au cercle (C).

Démontrer que O est l'orthocentre du triangle IMM' et que I appartient à la droite AB.

2. a. Définir analytiquement la transformation T .

Pour cela, on utilisera le repère cartésien orthonormé d'origine O tel que A ait pour coordonnées $(-R; 0)$.

- b. Pour les trois questions α , β , γ , on donnera une solution en utilisant le repère et une solution n'utilisant pas le repère.

α . Démontrer que T est involutive.

β . Quels sont les points invariants par T ?

γ . Démontrer que le cercle (Γ) de diamètre MM' est, quel que soit M appartenant à Π^* , orthogonal au cercle (C).

3. Soit p la puissance du point A par rapport au cercle (Γ) défini précédemment.

- a. Évaluer p en fonction des coordonnées du point M .

- b. Quels sont, dans l'inversion de pôle A et de puissance p , les transformés du cercle (Γ) , du cercle (C) , du point M et du point M' ?
 - c. Démontrer que le point M' est l'orthocentre du triangle AMB . Qu'en résulte-t-il pour les cercles circonscrits aux triangles AMB et $AM'B$?
4. a. Étudier la figure transformée par T d'une droite passant par A , d'un cercle passant par A et B .
- b. Que peut-on dire du mouvement de M' lorsque le point M décrit d'un mouvement uniforme une demi-droite d'origine A , un arc d'un cercle passant par A et B [la demi-droite ou l'arc ne coupant pas les droites (α) et (β) ?

N. B. - Les trois parties du problème sont indépendantes.