Durée : 4 heures

Baccalauréat C septembre 1974 Limoges

EXERCICE 1

Les éléments de l'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ étant notés $\dot{0}$, $\dot{1}$, $\dot{2}$, ..., $(n \dot{-} 1)$, résoudre l'équation

$$x^2 - \dot{3}x - \dot{4} = \dot{0}$$

dans

1. $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$
2. $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

EXERCICE 2

1. Étudier les variations de la fonction f qui associe au nombre réel x le nombre

$$f(x) = \frac{|\mathrm{e}^x - 1|}{\mathrm{e}^{2x} + 2}$$

-
Étudier la continuité et la dérivabilité pour $x = 0$.
Tracer la courbe représentative par rapport à un repère orthonormé.

2. Discuter suivant les valeurs de m le nombre et le signe des racines de l'équation

$$\left|\mathrm{e}^x - 1\right| = m\left(\mathrm{e}^{2x} + 2\right)$$

PROBLÈME0

Soit P le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$. Soit f l'application de P dans P qui au point M de coordonnées $(x\,;\,y)$ fait correspondre le point M_1 de coordonnées $\left(x_1\,;\,y_1\right)$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 &=& \lambda x + y\\ y_1 &=& \lambda y\end{array}\right. \qquad \lambda \text{ réel donné.}$$

1. π étant le plan vectoriel associé à P, donner la matrice A de l'application linéaire φ qui au vecteur de coordonnées $(x\,;\,y)$ fait correspondre le vecteur de coordonnées $\left(x_1\,;\,y_1\right)$.
   Déterminer suivant les valeurs de λ le noyau et l'image de φ.
   À quelle condition φ est-elle bijective ?
   Quels sont les points invariants de l'application f ? Si f est bijective, déterminer la bijection réciproque.
2. M décrit la droite (D) d'équation $x = 1$. Quelle est la courbe (D_1) décrite par M_1 ? Montrer que (D_1) reste tangente à la courbe d'équation $x^2 = 4y$ quand λ varie.
3. **a.** Soit $A^2 = A \times A, \ldots, A^n = A^{n-1} \times A$.
   Montrer par récurrence que : $A^n = \begin{pmatrix}\lambda^n & n\lambda^{n-1}\\ 0 & \lambda^n\end{pmatrix}$.

   b. Soit $M_1 = f(M)$, $M_2 = f\left(M_1\right), \ldots, M_n = f\left(M_{n-1}\right)$.
   Quelles sont les coordonnées $\left(x_n\,;\,y_n\right)$ de M_n en fonction des coordonnées $(x\,;\,y)$ de M et de λ ?

4. **a.** Soit g la fonction définie par :

$$g(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n \quad \text{pour } x \text{ réel.}$$

On sait que pour $x \neq 1$ on a : $g(x) = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$.

Calculer la dérivée $g'(x)$ de $g(x)$ en utilisant les deux formes de $g(x)$.

En déduire la somme $h(\lambda) = 1 + 2\lambda + 3\lambda^2 + \ldots + n\lambda^{n-1}$

pour $\lambda \neq 1$.

b. On prend maintenant M_0 de coordonnées $x = 0$ et $y = 1$.

$M_1 = f(M_0)$. Les points $M_2, \ldots, M_n$ sont définis comme au 3. b.

Soit P_n le point du plan P défini par : $\overrightarrow{\mathrm{O}P_n} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \overrightarrow{\mathrm{O}M_i}$.

Calculer les coordonnées de P_n en fonction de λ.

c. Soit $\lambda \in]-1~;~+1[$. Montrer que si $n \to +\infty$, P_n admet une position limite Q que l'on déterminera.

d. Les coordonnées de Q sont fonction de λ. Quel est l'ensemble des points Q quand $\lambda \in]-1~;~+1[$? En donner une représentation graphique,