Durée : 4 heures

Baccalauréat C Limoges septembre 1975

Exercice 1

Soit l'équation

$$z^2+(1-2\mathrm{i})z+1+5\mathrm{i}=0$$

définie dans l'ensemble des nombres complexes.

1. Trouver les deux racines z' et z'' de cette équation.
2. Soit A et B les images par rapport à un repère orthonormé des solutions z' et z'', A étant le point dont l'abscisse est positive.

   Déterminer le centre ω d'une rotation, dont l'angle mesure $\dfrac{\pi}{2}$ radians, qui transformerait A en B. (On précisera les coordonnées de ω).

Exercice 2

1. Construire les tables d'addition et de multiplication dans l'anneau $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
2. Résoudre chacune des équations suivantes où l'inconnue est,suivant le cas, x ou le couple $(x\,;\,y)$:

$$\begin{array}{lcl}\dot{2}x & = & \dot{1}\\ \dot{2}x & = & \dot{0}\\ x+\dot{3}y & = & \dot{1}\\ \dot{2}x+y & = & \dot{0}\end{array}$$

   x et y étant éléments de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

3. Déterminer les entiers relatifs a et b tels que $a+3b-1$ et $2a+b$ soient tous les deux multiples de 4.

Problème

On cherche à déterminer une fonction continue unique f, définie sur $\mathbb{R}$, vérifiant :

$$\left\{\begin{array}{ll}(1) & \forall x\in\mathbb{R},\ \forall y\in\mathbb{R},\quad f(x+y)+x+y=[f(x)+x][f(y)+y]\\ (2) & f(1)=\mathrm{e}-1\end{array}\right.$$

1. En posant $x=y=\dfrac{t}{2}$, vérifier que

$$(3)\quad \forall t\in\mathbb{R},\quad f(t)+t\geqslant 0$$

2. Démontrer que, s'il existe un réel x_0 tel que $f(x_0)+x_0=0$, alors

$$(4)\quad \forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)+x=0$$

   En déduire que $f(x)+x$ n'est jamais nul et démontrer que $f(0)=1$.

3. Démontrer que :

$$(5) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad f(nx) = [f(x) + x]^n - nx$$

Calculer $f(-x) - x$ et démontrer que :

$$(6) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, \quad f(nx) = [f(x) + x]^n - nx$$

4. Calculer, en fonction du nombre e et de l'entier q, l'expression :

$$f\left(\frac{1}{q}\right) + \frac{1}{q}$$

Démontrer que :

$$(7) \quad \forall x \in \mathbb{Q}, \quad f(x) = \mathrm{e}^x - x.$$

5. Vérifier que la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \mathrm{e}^x - x$ satisfait bien à (1) et (2). On admettra que cette fonction est la seule fonction continue sur $\mathbb{R}$ ayant cette propriété.

a. Étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
Construire la courbe représentative de f dans un système d'axes orthonormé.
Quelle remarque peut-on faire au sujet de la tangente à la courbe (C) représentative de f au point d'abscisse 1 ?

b. Évaluer l'aire $\mathscr{A}(x)$, de la portion de plan comprise entre le courbe (C), son asymptote et les droites d'équation $x = 0$ et $x = X$ $(X < 0)$.

6. **a.** Démontrer que l'on a :

$$(8) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 + x \leqslant \mathrm{e}^x.$$

b. $\forall n \in \mathbb{N}^\star$ on pose $P_n(a) = (1+a)\left(1+a^2\right)\cdots(1+a^n)$, $a > 0$.
Vérifier que $P_n(a)$ est une fonction croissante de n satisfaisant à :

$$(9) \quad \forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad 0 < P_n(a) < \mathrm{e}^{\frac{a(1-a^n)}{1-a}}.$$

Démontrer enfin que pour $0 < a < 1$, il existe des nombres M dépendant de a et vérifiant :

$$(10) \quad \forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad P_n(a) < M.$$

Préciser en fonction de a une valeur possible de M.