↜ Baccalauréat C Limoges septembre 1977 ↝

EXERCICE 1 **5 POINTS**

Pour tout réel donné a strictement positif, on considère la fonction f_a de variable réelle x, définie par :

$$f_a(x) = \text{Log}\left(a - \text{e}^x\right).$$

On appelle $\mathcal{C}_a$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, et D_a son domaine de définition.

1. Étudier f_a construire sa courbe représentative $\mathcal{C}_a$ et déterminer l'ensemble image $f_a\left(D_a\right)$.
2. Montrer que f_a est une bijection de D_a sur $f_a\left(D_a\right)$. Déterminer son application réciproque, en déduire que $\mathcal{C}_a$ possède un axe de symétrie,
3. b étant un réel strictement positif, montrer que $\mathcal{C}_b$ se déduit de $\mathcal{C}_a$ par une translation qu'on précisera,
   Note : Log désigne le logarithme népérien.

EXERCICE 2 **3 POINTS**

b est un entier naturel donné strictement supérieur à 1. On rappelle que

$$b^2 - 1 = (b+1)(b-1).$$

1. Quel est le plus grand diviseur commun de b^2 et $(b-1)$?
2. Quel est l'ensemble des solutions appartenant à Z^2 de l'équation

$$b^2x + (b-1)y = 1?$$

3. Application numérique : résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation

$$9x + 2y = 1.$$

PROBLÈME **12 POINTS**

Partie A

Soit E l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 de la forme)

$$M = \begin{pmatrix} a+b & a\\ a & -a+b \end{pmatrix}$$

où a et b sont des nombres réels,

1. Démontrer que E muni de l'addition des matrices et de la multiplication par un nombre réel est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. En donner une base.
2. Démontrer que E muni de l'addition et de la multiplication des matrices a une structure d'anneau. Est-ce un corps ?

3. Soit $\mathscr{P}$ le plan vectoriel euclidien de base orthonormée $\left(\vec{\imath}\,,\ \vec{\imath}\right)$ et soit f l'endomorphisme de $\mathscr{P}$ dont la matrice dans la base $\left(\vec{\imath}\,,\ \vec{\imath}\right)$ est un élément de E.
Définir, suivant les valeurs de a et b, le noyau et l'image de f.
f peut-il être involutif ? Dans ce cas, préciser la nature de f.

Partie B

On suppose, dans toute la suite, $a = 1$ et $b = 0$.
Soit P le plan affine euclidien associé à $\mathscr{P}$, rapporté au repère cartésien orthonormé $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\right)$.
Soit F l'application affine de P, associé à f, laissant le point I de coordonnées $(1\,;\,2)$ invariant.

1. Tout point M de P, de coordonnées $(x\ ;\ y)$ a pour image par F le point M' de coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$. Exprimer les coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$ de M' en fonction des coordonnées $(x\,;\ y)$ de M.

2. À tout point M de coordonnées $(x\,;\ y)$ de P, on associe le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ (z affixe de M).
Si z' est l'affixe de M' et z l'affixe de M, montrer que :

$$z' = (1+\mathrm{i})\overline{z} - 2 + 3\mathrm{i}$$

($\overline{z}$ désigne le nombre complexe conjugué de z).
Donner la nature et les caractéristiques de l'application affine F.

3. Soit S la symétrie orthogonale par rapport à la droite affine d'équation

$$y = \left(1 - \sqrt{2}\right)x + 1.$$

Quelle relation lie les affixes d'un point M et de son symétrique N ?
Préciser la nature de l'application affine $G = S \circ F$; en donner les caractéristiques.

4. Soit la famille de courbes (C) définie par l'équation

$$y^2 = m^2x^2 - 2x + 1$$

où m est un paramètre réel. Discuter suivant les valeurs de m la nature des courbes (C).
Construire la courbe correspondant à $m = \dfrac{1}{2}$ et son image par G.