

♣ Baccalauréat C Limoges¹ septembre 1980 ♣

EXERCICE 1

Dans le système de numération à base cinq, l'entier naturel n s'écrit

$$n = \overline{3x4y0}.$$

1. Quels sont les couples $(x; y)$ tels que n soit divisible par quatre?
2. Quels sont les couples $(x; y)$ tels que n soit divisible par six?
3. Quels sont les couples $(x; y)$ tels que n soit divisible par douze? En déduire qu'il existe un seul n divisible par douze tel que x soit strictement inférieur à y ; donner son écriture dans le système décimal.

EXERCICE 2

1. Dans le plan vectoriel P rapporté à la base (\vec{i}, \vec{j}) , on considère la projection p sur la droite vectorielle engendrée par le vecteur $a\vec{i} + b\vec{j}$ ($a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$), et dont la direction est déterminée par le vecteur \vec{j} ; et la projection q sur la droite vectorielle engendrée par le vecteur $c\vec{i} + d\vec{j}$ ($c \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{R}^*$), et dont la direction est déterminée par le vecteur \vec{i} .
Soit alors f l'application linéaire $f = ap + dq$.
(Rappel : \mathbb{R}^* désigne l'ensemble $\mathbb{R} - \{0\}$ des réels non nuls.)
Former la matrice M de f dans la base (\vec{i}, \vec{j}) .
2. Utiliser les résultats de la question précédente pour décomposer sous la forme $ap + dq$ l'application linéaire g de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ dans la base (\vec{i}, \vec{j}) , p et q étant deux projections vectorielles que l'on précisera, a et d deux réels que l'on calculera.

PROBLÈME

On notera dans ce problème, V l'espace vectoriel des fonctions f à valeurs réelles définies, continues et dérivables sur \mathbb{R} ; et l'on désignera par f' la dérivée première de la fonction f .
Le nombre réel θ étant élément de l'intervalle $]0; 1[$, le but du problème est d'étudier pour certaines fonctions f de V l'ensemble $E(f; \theta)$ des réels x tels que l'on ait

$$(1) \quad f(x+1) - f(x) = f'(x+\theta).$$

Partie A

On étudie $E(f; \theta)$ pour les fonctions polynômes.

1. Caractériser $E(f; \theta)$ pour les fonctions affines

$$f: x \mapsto ax + b.$$

2. Si f est une fonction polynôme de degré deux

$$f: x \mapsto ax^2 + bx + c,$$

avec $a \neq 0$, montrer que $E(f; \theta)$ est non vide pour une valeur unique t_0 de θ , que l'on calculera; caractériser $E(f; t_0)$.

3. On considère dans cette question la fonction polynôme de degré trois

$$f: x \longrightarrow x^3$$

- a. Montrer que $E(f; \theta)$ est vide pour une valeur unique t_1 de θ que l'on calculera; caractériser $E(f; \theta)$ pour $\theta \neq t_1$.
- b. On considère la fonction φ de la variable réelle θ

$$\varphi: \theta \longrightarrow \frac{3\theta^2 - 1}{3(1 - 2\theta)}.$$

Étudier cette fonction φ sur l'intervalle $]0; 1[$, et en tracer la représentation graphique par rapport à un repère orthonormé (unité d'axes : 6 cm).

- c. Dédurre de a. et de b. que, x étant fixé dans \mathbb{R} , il existe au moins une valeur de θ dans $]0; 1[$ telle que x soit élément de l'ensemble $E(f; \theta)$; on précisera les valeurs de x pour lesquelles il existe deux telles valeurs de θ .

Partie B

On considère les fonctions exponentielles f_m du type

$$f_m: x \longrightarrow e^{mx}, \text{ où } m \text{ est un réel strictement positif.}$$

1. Montrer que, à chaque valeur strictement positive de m , on peut associer un nombre réel et un seul, noté θ_m , tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_m(x+1) - f_m(x) = f'_m(x + \theta_m),$$

et exprimer θ_m en fonction de m .

2. Étudier la variation de chacune des fonctions

$$g_1: t \longrightarrow e^t - t - 1 \quad \text{et} \quad g_2: t \longrightarrow te^t - t - 1.$$

En déduire que pour m strictement positif, $g_1(m)$ et $g_2(m)$ sont strictement positifs.

3. À l'aide du résultat précédent, montrer que les réels θ_m déterminés au 1. sont tous strictement compris entre 0 et 1.
4. Le nombre strictement positif m étant fixé, caractériser $E(f_m; \theta)$ suivant les différentes valeurs du réel θ de $]0; 1[$.

Partie C

Le réel θ étant fixé dans $]0; 1[$, on considère les fonctions f satisfaisant à la relation (1) pour toute valeur réelle de la variable x , et on note V_θ leur ensemble.

1. Montrer que V_θ constitue un sous-espace vectoriel de V .
2. Montrer par récurrence que, si une fonction indéfiniment dérivable est élément de V_θ il en est ainsi de toutes ses dérivées successives.
3. a. Dédurre des résultats précédents que les seules fonctions polynômes de V_θ sont les fonctions affines, sauf pour $\theta = \frac{1}{2}$.
- b. Quelles sont les fonctions polynômes de $V_{\frac{1}{2}}$?