

∞ Baccalauréat C Limoges septembre 1978 ∞

EXERCICE 1

4 POINTS

Soit $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

- Sachant que 2 et 3 sont premiers entre eux :
 - Prouver que $A = \{x \in \mathbb{Z} / f(x) \in \mathbb{Z}\}$ est non vide.
 - Déterminer A .
- Déterminer $B = \{x \in A / x^2 + f^2(x) \in 5\mathbb{Z}\}$.

EXERCICE 2

4 POINTS

L'espace vectoriel E de dimension 3 est muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère l'endomorphisme f de E défini par

$$\begin{cases} f(\vec{i}) = \vec{i} + \vec{j} \\ f(\vec{j}) = \vec{i} + 2\vec{j} \\ f(\vec{k}) = \vec{i} - \vec{j} \end{cases}$$

- Déterminer le noyau N de f et en donner une base.
Déterminer l'image E' de f et démontrer que (\vec{i}, \vec{j}) en est une base.
- Soit g la restriction de f à l'image E' . Donner la matrice A de g sur la base (\vec{i}, \vec{j}) ; montrer que g est bijective et déterminer l'application réciproque g^{-1} .
- Déterminer l'unique endomorphisme h de E ayant les propriétés suivantes : la restriction de h à E' est g^{-1} et le noyau de h est le noyau N de f .

PROBLÈME

4 POINTS

On appelle F l'ensemble de toutes les fonctions de \mathbb{R} vers \mathbb{R} et E le sous-ensemble de F des fonctions de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définies et continues sur \mathbb{R} .

On considère l'application de E dans F qui à la fonction f de E fait correspondre la fonction g définie pour tout x réel par :

$$g(x) = \int_0^x t f(t) dt.$$

g sera appelée la transformée de f .

Partie A

L'objet de cette partie est l'étude des transformées de fonctions f particulières. Les quatre questions qui constituent cette partie sont indépendantes.

- On prend $f(x) = |x|$; définir, pour tout x , $g(x)$.
- On prend $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$.
 - Définir g .

- b.** Etudier les variations de g et tracer la : courbe (C) représentant ces variations dans un repère orthonormé. Préciser les branches infinies de (C).
- 3.** On pose $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
- a.** Définir g .
- b.** Démontrer que la courbe (Γ) représentant en repère orthonormé les variations de la fonction de \mathbb{R} dans $\mathbb{R} : x \mapsto (\sqrt{1+x^2} - 1)$ est une partie d'une conique (H). Préciser les éléments géométriques de (H) (centre, sommets, foyers, directrices, excentricité, asymptotes éventuelles). Tracer (H) et (Γ) sur le même dessin.
- 4.** On pose maintenant $f_0(x) = \sin x$ et $f_n(x) = x^n \sin x$, $n \in \mathbb{N}^*$.
La transformée de f_n sera notée g_n ($n \in \mathbb{N}$).
En faisant deux intégrations par parties, trouver une relation entre $g_n(x)$ et $g_{n-2}(x)$.
Calculer $g_0(x)$; en déduire $g_2(x)$.

Partie B

- 1. a.** Montrer que pour toute fonction f appartenant à E , la fonction g est continue sur \mathbb{R} . On notera alors φ l'application de E dans E définie par $\varphi(f) = g$.
- b.** On sait que E est un espace vectoriel sur \mathbb{R} . Démontrer que l'application φ de E dans E qui à f associe g est un endomorphisme de E .
- 2.** Montrer que g est une fonction dérivable sur \mathbb{R} et déterminer $g'(x)$ pour tout x . En revenant à la définition du nombre dérivé, démontrer que g' est dérivable au point 0.
- 3.** f étant positive sur \mathbb{R}_+ , démontrer que si f est paire ou impaire, il en est de même pour g . On pourra utiliser les propriétés de symétrie de la courbe représentant, en repère orthonormé, les variations de la fonction F définie par $F(x) = xf(x)$ et interpréter géométriquement les nombres $g(x)$ et $g(-x)$.