∽ Baccalauréat C Limoges septembre 1979 ∾

EXERCICE 1 **4 POINTS**

C étant un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, on considère l'application :

$$f : \left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{C} & \to & \mathbb{C}\\ z & \longmapsto & f(z) = az + b\overline{z}\end{array}\right.$$

($\overline{z}$ désigne le nombre complexe conjugué de z).
où $a \in \mathbb{R}_+$ et où b est le nombre complexe de module a et d'argument θ, θ étant un réel différent de $k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

1. Montrer que f est une application linéaire dont on donnera la matrice dans la base (1 ; i) de $\mathbb{C}$.
2. Déterminer le noyau Ker f et l'image Im f (on exprimera un vecteur de Ker f et un vecteur de Im f en fonction de θ seul).
3. Montrer que Ker $f \oplus \text{Im} f = \mathbb{C}$.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Soit un sac contenant six jetons numérotés, 0, 0, 1, 2, 3, 6.
On tire successivement trois jetons, en notant à chaque fois le numéro inscrit sur le jeton et en remettant à chaque fois le jeton tiré dans le sac. On admet que tous les tirages sont équiprobables.
On obtient ainsi un triplet de nombres (a, b, c) et à chacun d'eux on associe la fonction polynôme

$$f : x \longmapsto f(x) = ax^2 + bx + c.$$

On définit une variable aléatoire X (ou aléa numérique) en associant à chaque triplet obtenu le degré du polynôme f (on conviendra que le polynôme nul est de degré 0).
Déterminer la loi de probabilité de X ; calculer l'espérance mathématique de X.

PROBLÈME **12 POINTS**

α est un nombre réel strictement positif différent de 1.

Partie A

On considère l'application :

$$f_\alpha : \begin{array}{ccl}\mathbb{R}+ & \to & \mathbb{R}\\ t & \longmapsto & \left\{\begin{array}{lcl} f_\alpha(t) & = & \dfrac{t + t^\alpha}{2} \text{ si } t \neq 0\\ f_\alpha(0) & = & 0\end{array}\right.\end{array}$$

On appelle (C_α) la courbe représentative de f_α dans un repère orthonormé.

1. Étudier la continuité de f_α en $x = 0$.
2. Étudier les variations de f_α.
3. Préciser suivant les valeurs de α la demi-tangente à la courbe (C_α) au point d'abscisse 0 ainsi que la branche infinie de la courbe (C_α)
   Dans chaque cas donner l'allure générale de la courbe (C_α).

Partie B

Soit V_2 l'espace vectoriel réel, euclidien orienté de dimension 2 rapporté à la base orthonormée directe (rD.

t étant fixé, t réel strictement positif, on considère l'application linéaire T_t de V_2 dans V_2 dont la matrice dans la base $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ est :

$$\begin{pmatrix} \dfrac{t+t^{\alpha}}{2} & \dfrac{t-t^{\alpha}}{2} \\ \dfrac{t-t^{\alpha}}{2} & \dfrac{t+t^{\alpha}}{2} \end{pmatrix}$$

1. On considère :

$$E_{\lambda} = \left\{\overrightarrow{u} \in V_2 | \quad T_t\left(\overrightarrow{u}\right) = \lambda\overrightarrow{u}\right\}$$

λ étant un réel donné.

Montrer que si t est différent de 1, il existe deux réels distincts λ_1 et λ_2 tels que E_{λ_1} et E_{λ_2} ont d'autres éléments que le vecteur nul.

Montrer que E_{λ_1} et E_{λ_2} sont deux droites vectorielles dont on choisira des bases respectives $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ telles que $\left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right)$ soit une base orthonormée directe de V_2. Écrire la matrice de T_t dans la base $\left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right)$.

2. Soit M l'ensemble des applications T_t quand t décrit $\mathbb{R}_+^{\star}$. Montrer que $(M, \circ)$ est un groupe commutatif isomorphe à $\left(\mathbb{R}_+^{\star}, \times\right)$, la loi $\circ$ étant la loi de composition des applications.

3. On considère l'espace affine euclidien E_2 associé à V_2. Soit $\mathscr{R}$ le repère $\left(\text{O}\,; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$. Soit b t l'application affine d'endomorphisme associé T_t et admettant O pour point invariant. Soit A le point de coordonnées $x = 0$, $y = 1$; soit A_1 son transformé par T_t.

Déterminer les coordonnées de A_1 dans le repère $\mathscr{R}_1$ déduit de $\mathscr{R}$ par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.

4. On considère le point B dont les coordonnées dans $\mathscr{R}_1$ sont $X = t$, $Y = t^{\alpha}$.

Montrer que B se déduit de A_1 par une transformation simple que l'on déterminera.