Baccalauréat C septembre 1981 Limoges

EXERCICE 1

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} = \{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \dot{3}, \dot{4}, \dot{5}, \dot{6}\}$ l'équation :

$$\dot{4}x = 1.$$

2. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'équation

$$11x + 7y = 1.$$

3. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'équation

$$319x + 203y = 145.$$

(On pourra utiliser le 2 pour trouver une solution particulière.)

EXERCICE 2

Soit E un espace affine euclidien de dimension 3, rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R} = \left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On note $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel associé à E. On considère l'application affine f de E dans E déterminée de la façon suivante :
le point A de coordonnées $(1 ; 1 ; 1)$ est invariant par f et l'endomorphisme φ de $\mathcal{E}$ associé à f est tel que

$$\begin{array}{rcl}\varphi\left(\vec{\imath}\right) & = & \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\vec{\imath} - \vec{k}\right);\\ \varphi\left(\vec{\jmath}\right) & = & \dfrac{1}{2}\left(\vec{\imath} + \sqrt{2}\vec{\jmath} + \vec{k}\right);\\ \varphi(k) & = & \dfrac{1}{2}\left(\vec{\imath} - \sqrt{2}\vec{\jmath} + \vec{k}\right).\end{array}$$

1. Donner l'expression analytique de f sur le repère $\mathcal{R}$. Montrer que f est une isométrie affine.
2. Démontrer que f est une rotation ponctuelle dont on précisera l'axe.
3. On désigne par θ l'angle de la rotation f. Montrer que

$$\theta = \text{angle}\left[\vec{\imath} - \vec{\jmath}, \varphi\left(\vec{\imath} - \vec{\jmath}\right)\right].$$

En déduire $\cos\theta$.

PROBLÈME

Partie A

1. Soit la fonction numérique

$$f_a : x \longmapsto \frac{x^2 + x\sqrt{3} + a\sqrt{3}}{x\sqrt{3} + 3}$$

où a est un nombre réel non nul.

On désigne par C_a sa courbe représentative, tracée dans un plan affine euclidien P rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ d'axes $x'x$ et $y'y$.

Montrer que C_a a deux asymptotes et un centre de symétrie ne dépendant pas de a. Étudier, suivant les valeurs de a, le sens de variations de f_a.

2. Soit f la fonction correspondant à $a = 3\sqrt{3}$; sa courbe représentative est notée C. Étudier f et tracer la courbe C.

3. Calculer, en fonction du réel h, l'aire de la partie de plan comprise entre C, son asymptote oblique, l'axe $y'y$ et la droite d'équation $x = h$ (on suppose $h > -\sqrt{3}$).

Déterminer les valeurs de h pour lesquelles cette aire est égale à un nombre réel positif donné k.

Calculer cette aire pour $h = 3 - \sqrt{3}$.

Partie B

Soit T la transformation ponctuelle de P qui, à tout point M d'affixe z, fait correspondre le point M' d'affixe z', z et z' étant des nombres complexes tels que

$$z' = \left(-\frac{1}{2} - \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{z} - \text{i}.$$

(On note $\overline{z}$ le complexe conjugué de z.)
Quelle est la nature de cette transformation ? Calculer les coordonnées $\left(x'~;~y'\right)$ de M' en fonction des coordonnées $(x~;~y)$ de M.
Déterminer l'ensemble des points invariants par T. Identifier T avec précision.

Partie C

1. Soit C'_a la courbe transformée de C_a par T.

Former l'équation cartésienne de C'_a ; démontrer que C'_a est une hyperbole.

Déterminer ses asymptotes. Justifier ces résultats à l'aide de la définition géométrique de T.

2. Construire la courbe C', transformée de C par T. Préciser ses sommets, ses foyers, ses directrices et son excentricité.