Baccalauréat Limoges septembre 1967
Mathématiques élémentaires et mathématiques et technique

I.

On donne les deux nombres complexes

$$z_1 = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3} \quad \text{et} \quad z_2 = \sqrt{2}(-1+\mathrm{i}).$$

1. Déterminer le module et l'argument de chacun des deux nombres z_1 et z_2, ainsi que le module et l'argument de leur produit, $z_1 z_2$.
2. Déterminer le module et l'argument de chacun des deux nombres complexes z tels que

$$z^2 = z_1 z_2.$$

II.

1. Factoriser les deux polynômes suivants :

$$\begin{array}{rcr} A(x) & = & 10x^3 + 60x^2 + 110x + 60, \\ B(x) & = & 6x^2 + \ \ 18x + 12. \end{array}.$$

2. On suppose que x est un entier naturel : $x = n$.
   Déterminer le p.g.c.d. et le p.p.c.m. des deux entiers naturels $A(n)$ et $B(n)$.

III.

Soit Δ une droite orientée par un vecteur unitaire $\overrightarrow{\imath}$ et sur laquelle on désigne l'origine par O.
Soit a, b et d trois nombres réels donnés, tels que $ad - b \neq 0$.
On désigne par Δ_1 l'ensemble des points de Δ d'abscisse x telle que $x \neq -d$ et $x \neq a$.
On définit la transformation ponctuelle h suivante :
à tout point m de Δ_1, d'abscisse x, on associe le point M$= h(m)$, d'abscisse X telle que

$$X = \frac{ax+b}{x+d}.$$

1. Montrer que la transformation h admet une transformation réciproque et la définir.
   À quelle condition la transformation h est-elle involutive ?
2. Quelle condition les nombres a, b et d doivent-ils vérifier pour que la transformation h admette deux points invariants distincts, A et B, d'abscisses respectives α et β ?
   Calculer, dans ce cas, $\alpha + \beta$ et $\alpha\beta$.
   On supposera cette condition remplie dans toute la suite du problème.
3. Montrer que les points A et B sont symétriques par rapport à un point, C, dont on déterminera l'abscisse et qu'ils sont, en général, inverses l'un de l'autre dans une inversion de centre O, dont on déterminera la puissance.
   Montrer, en discutant suivant le signe de b, que le cercle de diamètre AB est orthogonal à un cercle de centre O ou coupe un cercle de centre O en deux points diamétralement opposés.
   En déduire une construction des points A et B dans les deux cas particuliers suivants :

$$X = \frac{7x+4}{x+5} \quad \text{et} \quad X = \frac{7x-1}{x+4}.$$

4. Soit m un point quelconque de Δ_1 distinct de A et de B.
Montrer que $X - \alpha = \lambda \dfrac{x - \alpha}{x + d}$, λ étant une constante, que l'on déterminera.
$\left(\text{On pourra, pour cela, utiliser la relation } \alpha = \dfrac{a\alpha + b}{\alpha + d}.\right)$
Déterminer de même la constante μ telle que $X - \beta = \mu \dfrac{x - \beta}{x + d}$.
Montrer que $\dfrac{X - \alpha}{X - \beta} = k \dfrac{x - \alpha}{x - \beta}$ et vérifier que

$$k = \frac{\beta + d}{\alpha + d} = \frac{a - \alpha}{a - \beta}.$$

Étudier la disposition des points A, B, M et m, dans le cas particulier $k = -1$.

5. Soit $m_1,\ m_2, \ldots,\ m_p$ une suite de p points de Δ_1, d'abscisses respectives $x_1,\ x_2, \ldots, ,\ x_p$ tels que chacun d'eux soit le transformé du précédent par la transformation h.
On pose $u_i = \dfrac{x_i - \alpha}{x_i - \beta}$.
Montrer que la suite $u_1,\ u_2, \ldots,\ u_p$ est une progression géométrique.
Application numérique : On donne $X = \dfrac{5x - 3}{x + 1}$ avec $x_1 = 2$.
Calculer u_1, k et u_p en supposant $\alpha > \beta$.
Calculer à $\dfrac{1}{100}$ près les valeurs numériques de x_2, x_3 et x_4.