

# Quelles mathématiques se construisent aujourd'hui ?

Marc van Leeuwen

Laboratoire de Mathématiques et Applications  
Université de Poitiers

27 octobre 2008 / journées nationales APMEP, La Rochelle

# Plan

- 1 Introduction
- 2 Le logiciel `atlas`
- 3 Groupe de Lie, algèbre de Lie, système de racines
- 4 Classifications
- 5 Types classiques et exceptionnels
- 6 Atlas : mathématiques en construction ?

# Plan

- 1 Introduction
- 2 Le logiciel `atlas`
- 3 Groupe de Lie, algèbre de Lie, système de racines
- 4 Classifications
- 5 Types classiques et exceptionnels
- 6 Atlas : mathématiques en construction ?

## Petite chronologie (personnelle)

- 1989–1995, Amsterdam. Développement du logiciel 'LiE'.
- 2002. Congrès "Théorie de Lie Algorithmique" à Montréal ; Le projet 'Atlas of Lie groups and Representations' formé.
- 2003. Invitation de Fokko du Cloux à rejoindre 'Atlas'.
- 2004. Fokko commence à écrire le logiciel `atlas`.
- novembre 2005. Algorithme "polynômes de KLV" est prêt.
- décembre 2005. Ma 1ère réunion 'Atlas'. Maladie Fokko.
- 10 novembre 2006. Décès Fokko.
- décembre 2006. Version modulaire "crack  $E_8$ " d'`atlas`.
- 8 janvier 2007. Polynômes de KLV pour  $E_8(\mathbb{R})$  calculés.
- 19 mars 2007. Annonce du résultat.
- octobre 2008. Un autre algorithme `branch` est prêt.

# Limitations

On ne peut pas tout expliquer dans une heure.

*Je ne parlerai pas de*

- la théorie de groupes de Lie réels (non compacts),
- leurs représentations (de dimension infinie),
- la signification des polynômes de Kazhdan-Lusztig-Vogan,
- les applications du résultat trouvé,
- le but ultime du projet 'Atlas'.

Par contre j'espère expliquer

- Qu'est-ce qui est désigné par « $E_8$ » ?

# Limitations

On ne peut pas tout expliquer dans une heure.

*Je ne parlerai pas de*

- la théorie de groupes de Lie réels (non compacts),
- leurs représentations (de dimension infinie),
- la signification des polynômes de Kazhdan-Lusztig-Vogan,
- les applications du résultat trouvé,
- le but ultime du projet 'Atlas'.

Par contre j'espère expliquer

- Qu'est-ce qui est désigné par «  $E_8$  » ?

# Limitations

Le logiciel **atlas** ne manipule que des objets discrets



Soyons discrets

# Plan

- 1 Introduction
- 2 Le logiciel **atlas**
- 3 Groupe de Lie, algèbre de Lie, système de racines
- 4 Classifications
- 5 Types classiques et exceptionnels
- 6 Atlas : mathématiques en construction ?



# Plan

- 1 Introduction
- 2 Le logiciel `atlas`
- 3 Groupe de Lie, algèbre de Lie, système de racines**
- 4 Classifications
- 5 Types classiques et exceptionnels
- 6 Atlas : mathématiques en construction ?

## Définition

Un groupe de Lie  $G$  sur  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$  est un ensemble muni à la fois des structures de *groupe* et de *variété différentielle*, telles que la composition  $(x, y) \mapsto x.y$  soit de classe  $\mathcal{C}^2(G \times G, G)$ .

Les composantes connexes de  $G$  forment un groupe dont la structure différentielle ne donne aucun renseignement.

Il est donc raisonnable de prendre pour point de départ un groupe de Lie *connexe*.

Mais cette classe est encore trop grande pour un traitement calculatoire général. Pour point de départ, atlas prend les groupes de Lie *complexes connexes réductifs*.

## Définition

Un groupe de Lie  $G$  sur  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$  est un ensemble muni à la fois des structures de *groupe* et de *variété différentielle*, telles que la composition  $(x, y) \mapsto x.y$  soit de classe  $\mathcal{C}^2(G \times G, G)$ .

Les composantes connexes de  $G$  forment un groupe dont la structure différentielle ne donne aucun renseignement.

Il est donc raisonnable de prendre pour point de départ un groupe de Lie *connexe*.

Mais cette classe est encore trop grande pour un traitement calculatoire général. Pour point de départ, **atlas** prend les groupes de Lie *complexes connexes réductifs*.

# Algèbre de Lie d'un groupe de Lie

Pour un groupe de Lie connexe  $G$ , l'étude de son espace tangent  $\mathfrak{g} = T_e(G)$  à l'élément neutre est déjà très informatif.

La dérivée seconde du *commutateur*  $(x, y) \mapsto x.y.x^{-1}.y^{-1}$  fournit une application bilinéaire  $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  notée  $(a, b) \mapsto [a, b]$ .

L'espace vectoriel  $\mathfrak{g}$  muni de ce *crochet de Lie* vérifie les axiomes d'une *algèbre de Lie* (sur  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ ) :

- $[b, a] = -[a, b]$ ,
- $[[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = 0$ .

# Algèbre de Lie d'un groupe de Lie

Pour un groupe de Lie connexe  $G$ , l'étude de son espace tangent  $\mathfrak{g} = T_e(G)$  à l'élément neutre est déjà très informatif.

La dérivée seconde du *commutateur*  $(x, y) \mapsto x.y.x^{-1}.y^{-1}$  fournit une application bilinéaire  $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  notée  $(a, b) \mapsto [a, b]$ .

L'espace vectoriel  $\mathfrak{g}$  muni de ce *crochet de Lie* vérifie les axiomes d'une *algèbre de Lie* (sur  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ ) :

- $[b, a] = -[a, b]$ ,
- $[[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = 0$ .

# Sous-algèbres de Cartan

Soit  $G$  un groupe complexe réductif. La notion de *sous-algèbre de Cartan* de  $\mathfrak{g}$  est telle que

- il en existe toujours au moins une,
- elles sont (toutes) maximales commutatives,
- leur ensemble forme *une* orbite sous l'action de  $G$ .

Alors sans état d'âme, on fixe une sous-algèbre de Cartan  $\mathfrak{h}$ .

Exemple fondamental :  $G = \mathbf{GL}(n, \mathbf{C})$  (matrices carrées inversibles),  $\mathfrak{g} = M_n(\mathbf{C})$  (matrices carrées), et  $\mathfrak{h}$  est formé des matrices diagonales.

# Sous-algèbres de Cartan

Soit  $G$  un groupe complexe réductif. La notion de *sous-algèbre de Cartan* de  $\mathfrak{g}$  est telle que

- il en existe toujours au moins une,
- elles sont (toutes) maximales commutatives,
- leur ensemble forme *une* orbite sous l'action de  $G$ .

Alors sans état d'âme, on fixe une sous-algèbre de Cartan  $\mathfrak{h}$ .

Exemple fondamental :  $G = \mathbf{GL}(n, \mathbf{C})$  (matrices carrées inversibles),  $\mathfrak{g} = M_n(\mathbf{C})$  (matrices carrées), et  $\mathfrak{h}$  est formé des matrices diagonales.

# Racines

Comme  $\mathfrak{h}$  est commutatif, on peut décomposer  $\mathfrak{g}$  comme somme d'espaces propres simultanés pour les opérations  $\text{ad } h = [h, \cdot] : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  pour tout  $h \in \mathfrak{h}$ .

Un tel espace propre  $V$  est caractérisé par son *poide*  $\lambda : \mathfrak{h} \rightarrow \mathbf{C}$ , qui est tel que  $[h, x] = \lambda(h)x$  pour tout  $h \in \mathfrak{h}$  et  $x \in V$ .

En plus,  $\dim V_\lambda \leq 1$ , sauf pour  $\lambda = 0 \in \mathfrak{h}^*$  (où  $V_\lambda = \mathfrak{h}$ ).

Les  $\lambda \neq 0$  avec  $\dim V_\lambda = 1$  sont les *racines* de  $\mathfrak{g}$  (pour  $\mathfrak{h}$ ).

Les racines forment un ensemble *fini*  $\Phi \subset \mathfrak{h}^*$ .

On a  $\dim \mathfrak{g} = \dim \mathfrak{h} + \#\Phi$ .



# Racines

Comme  $\mathfrak{h}$  est commutatif, on peut décomposer  $\mathfrak{g}$  comme somme d'espaces propres simultanés pour les opérations  $\text{ad } h = [h, \cdot] : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  pour tout  $h \in \mathfrak{h}$ .

Un tel espace propre  $V$  est caractérisé par son *poide*  $\lambda : \mathfrak{h} \rightarrow \mathbf{C}$ , qui est tel que  $[h, x] = \lambda(h)x$  pour tout  $h \in \mathfrak{h}$  et  $x \in V$ .

En plus,  $\dim V_\lambda \leq 1$ , sauf pour  $\lambda = 0 \in \mathfrak{h}^*$  (où  $V_\lambda = \mathfrak{h}$ ).

Les  $\lambda \neq 0$  avec  $\dim V_\lambda = 1$  sont les *racines* de  $\mathfrak{g}$  (pour  $\mathfrak{h}$ ).

Les racines forment un ensemble *fini*  $\Phi \subset \mathfrak{h}^*$ .

On a  $\dim \mathfrak{g} = \dim \mathfrak{h} + \#\Phi$ .

# Racines

Comme  $\mathfrak{h}$  est commutatif, on peut décomposer  $\mathfrak{g}$  comme somme d'espaces propres simultanés pour les opérations  $\text{ad } h = [h, \cdot] : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  pour tout  $h \in \mathfrak{h}$ .

Un tel espace propre  $V$  est caractérisé par son *poide*  $\lambda : \mathfrak{h} \rightarrow \mathbf{C}$ , qui est tel que  $[h, x] = \lambda(h)x$  pour tout  $h \in \mathfrak{h}$  et  $x \in V$ .

En plus,  $\dim V_\lambda \leq 1$ , sauf pour  $\lambda = 0 \in \mathfrak{h}^*$  (où  $V_\lambda = \mathfrak{h}$ ).

Les  $\lambda \neq 0$  avec  $\dim V_\lambda = 1$  sont les *racines* de  $\mathfrak{g}$  (pour  $\mathfrak{h}$ ).

Les racines forment un ensemble *fini*  $\Phi \subset \mathfrak{h}^*$ .

On a  $\dim \mathfrak{g} = \dim \mathfrak{h} + \#\Phi$ .

## Action du groupe de Weyl sur $\mathfrak{h}$

Le groupe de Lie  $G$  agit par automorphismes sur son algèbre de Lie  $\mathfrak{h}$ , dont certains envoient  $\mathfrak{h} \mapsto \mathfrak{h}$  de façon *non-triviale*.

Cela donne un ensemble *fini* d'automorphismes de l'espace vectoriel  $\mathfrak{h}$ ; c'est le groupe de Weyl  $W$ .

Exemple.

$G = \mathbf{GL}(n, \mathbf{C})$ ,  $\mathfrak{g} = M_n(\mathbf{C})$ ,  $\mathfrak{h} = \{\text{matrices diagonales}\}$ .

Les matrices de  $\mathfrak{h}$  sont diagonalisables sur la base canonique, celles de  $\mathfrak{g} \cdot \mathfrak{h}$  sur la base des colonnes de la matrice  $g$ .

Pour certains  $g$  c'est la base canonique permutée, et  $g$  donne un automorphisme de  $\mathfrak{h}$  qui permute les coordonnées.

$W = S_n$  agit sur  $\mathfrak{h}$  par permutation des coefficients diagonaux.

## Action du groupe de Weyl sur $\mathfrak{h}$

Le groupe de Lie  $G$  agit par automorphismes sur son algèbre de Lie  $\mathfrak{h}$ , dont certains envoient  $\mathfrak{h} \mapsto \mathfrak{h}$  de façon *non-triviale*.

Cela donne un ensemble *fini* d'automorphismes de l'espace vectoriel  $\mathfrak{h}$  ; c'est le groupe de Weyl  $W$ .

Exemple.

$G = \mathbf{GL}(n, \mathbf{C})$ ,  $\mathfrak{g} = M_n(\mathbf{C})$ ,  $\mathfrak{h} = \{\text{matrices diagonales}\}$ .

Les matrices de  $\mathfrak{h}$  sont diagonalisables sur la base canonique. celles de  $\mathfrak{g} \cdot \mathfrak{h}$  sur la base des colonnes de la matrice  $g$ .

Pour certains  $g$  c'est la base canonique permutée, et  $g$  donne un automorphisme de  $\mathfrak{h}$  qui permute les coordonnées.

$W = S_n$  agit sur  $\mathfrak{h}$  par permutation des coefficients diagonaux.

# Systèmes de racines

Les systèmes de racines  $\Phi$  sont caractérisés par :

- L'ensemble  $\Phi$  est stable par l'action du groupe  $W$  sur  $\mathfrak{h}^*$  ;
- Pour chaque  $\alpha \in \Phi$  l'action de  $W$  contient une réflexion  $s_\alpha$  avec  $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$  ;
- Les  $s_\alpha$  engendrent l'action de  $W$  sur  $\mathfrak{h}^*$  ;
- Pour tout  $\beta \in \Phi$  on a  $s_\alpha(\beta) - \beta \in \mathbf{Z}\alpha$  (condition cristallographique) ;
- $\Phi \cap 2\Phi = \emptyset$ .

Dans l'étude de  $\Phi$ , on peut limiter les scalaires à  $\mathbf{R}$  (ou à  $\mathbf{Q}$ ).

# Systèmes de racines

Les systèmes de racines  $\Phi$  sont caractérisées par :

- L'ensemble  $\Phi$  est stable par l'action du groupe  $W$  sur  $\mathfrak{h}^*$  ;
- Pour chaque  $\alpha \in \Phi$  l'action de  $W$  contient une réflexion  $s_\alpha$  avec  $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$  ;
- Les  $s_\alpha$  engendrent l'action de  $W$  sur  $\mathfrak{h}^*$  ;
- Pour tout  $\beta \in \Phi$  on a  $s_\alpha(\beta) - \beta \in \mathbf{Z}\alpha$  (condition cristallographique) ;
- $\Phi \cap 2\Phi = \emptyset$ .

Dans l'étude de  $\Phi$ , on peut limiter les scalaires à  $\mathbf{R}$  (ou à  $\mathbf{Q}$ ).

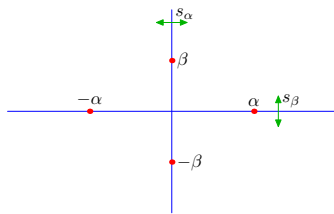
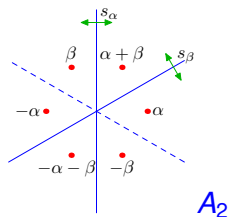
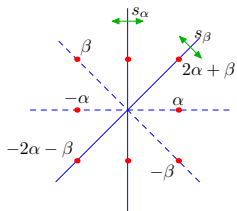
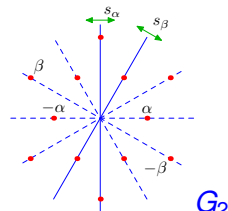
# Systèmes de racines

Les systèmes de racines  $\Phi$  sont caractérisés par :

- L'ensemble  $\Phi$  est stable par l'action du groupe  $W$  sur  $\mathfrak{h}^*$  ;
- Pour chaque  $\alpha \in \Phi$  l'action de  $W$  contient une réflexion  $s_\alpha$  avec  $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$  ;
- Les  $s_\alpha$  engendrent l'action de  $W$  sur  $\mathfrak{h}^*$  ;
- Pour tout  $\beta \in \Phi$  on a  $s_\alpha(\beta) - \beta \in \mathbf{Z}\alpha$  (condition cristallographique) ;
- $\Phi \cap 2\Phi = \emptyset$ .

Dans l'étude de  $\Phi$ , on peut limiter les scalaires à  $\mathbf{R}$  (ou à  $\mathbf{Q}$ ).

## Exemples en rang 2

 $A_1 \times A_1$  $A_2$  $B_2 = C_2$  $G_2$



# Plan

- 1 Introduction
- 2 Le logiciel `atlas`
- 3 Groupe de Lie, algèbre de Lie, système de racines
- 4 Classifications**
- 5 Types classiques et exceptionnels
- 6 Atlas : mathématiques en construction ?

# Groupes de Coxeter

En oubliant les racines, l'action de  $W$  sur  $\mathfrak{h}$  correspond à l'espace  $\mathbf{R}^n$  muni d'un groupe engendré par  $n$  réflexions indépendantes  $s_1, \dots, s_n$ .

C'est un *groupe de Coxeter*, caractérisé par  $(m_{i,j})_{i < j}$ , où  $m_{i,j}$  est l'ordre dans  $W$  du produit  $s_i \cdot s_j$ .

Le groupe a la présentation abstraite

$$W = \langle s_i : i \in I \mid s_i^2 = e ; (s_i s_j)^{m_{i,j}} = e \quad (i, j \in I) \rangle$$

Question fondamentale : dans quels cas le groupe  $W$  est-il fini ?

# Groupes de Coxeter

En oubliant les racines, l'action de  $W$  sur  $\mathfrak{h}$  correspond à l'espace  $\mathbf{R}^n$  muni d'un groupe engendré par  $n$  réflexions indépendantes  $s_1, \dots, s_n$ .

C'est un *groupe de Coxeter*, caractérisé par  $(m_{i,j})_{i<j}$ , où  $m_{i,j}$  est l'ordre dans  $W$  du produit  $s_i \cdot s_j$ .

Le groupe a la présentation abstraite

$$W = \langle s_i : i \in I \mid s_i^2 = e ; (s_i s_j)^{m_{i,j}} = e \quad (i, j \in I) \rangle$$

Question fondamentale : dans quels cas le groupe  $W$  est-il fini ?

# Groupes de Coxeter

En oubliant les racines, l'action de  $W$  sur  $\mathfrak{h}$  correspond à l'espace  $\mathbf{R}^n$  muni d'un groupe engendré par  $n$  réflexions indépendantes  $s_1, \dots, s_n$ .

C'est un *groupe de Coxeter*, caractérisé par  $(m_{i,j})_{i<j}$ , où  $m_{i,j}$  est l'ordre dans  $W$  du produit  $s_i \cdot s_j$ .

Le groupe a la présentation abstraite

$$W = \langle s_i : i \in I \mid s_i^2 = e ; (s_i s_j)^{m_{i,j}} = e \quad (i, j \in I) \rangle$$

Question fondamentale : dans quels cas le groupe  $W$  est-il fini ?

# Diagramme de Coxeter

La matrice  $(m_{i,j})_{i,j \in I}$  se visualise par un graphe sur  $I$ , avec une arête entre  $i$  et  $j$  si  $m_{i,j} > 2$  (non commutation) étiqueté par  $m_{i,j}$ .

Le groupe  $W$  est fini si et seulement si la matrice symétrique  $(-\cos \frac{\pi}{m_{i,j}})_{i,j \in I}$  est définie positive.

On peut tester séparément chaque composante connexe

La condition permet d'exclure comme sous-graphe :



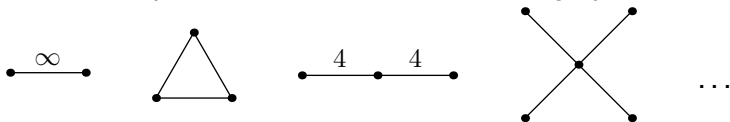
# Diagramme de Coxeter

La matrice  $(m_{i,j})_{i,j \in I}$  se visualise par un graphe sur  $I$ , avec une arête entre  $i$  et  $j$  si  $m_{i,j} > 2$  (non commutation) étiqueté par  $m_{i,j}$ .

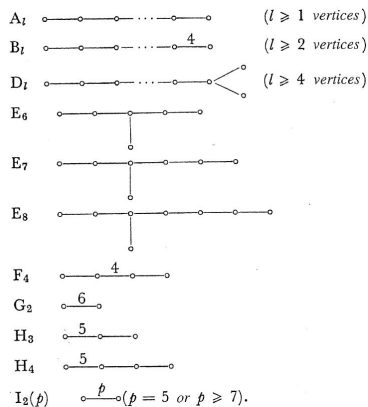
Le groupe  $W$  est fini si et seulement si la matrice symétrique  $(-\cos \frac{\pi}{m_{i,j}})_{i,j \in I}$  est définie positive.

On peut tester séparément chaque composante connexe

La condition permet d'exclure comme sous-graphe :



# Groupes de Coxeter irréductibles finis



type

ordre

 $A_n$  $(n+1)!$  $B_n$  $n! 2^n$  $D_n$  $n! 2^{n-1}$  $E_6$ 

51840

 $E_7$ 

2903040

 $E_8$ 

696729600

 $F_4$ 

1152

 $G_2$ 

12

 $H_3$ 

120

 $H_4$ 

14400

 $I_2(p)$  $2p$

# Polytopes réguliers

Les groupes de Coxeter et leur action interviennent dans la classification des polytopes convexes réguliers (généralisation de solide platonicien à dimension quelconque).

Le group de symétrie d'un polytope permute transitivement les faces, et sur chacun des faces, qui est un polytope régulier de dimension 1 moins, il réalise toutes les symétries de celle-ci.

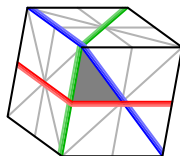
Ce groupe de symétrie est un groupe de Coxeter particulier.



# Domaine fondamental

Les symétries d'un polytope convexe régulier de dimension  $d$  sont engendrées par  $d$  réflexions orthogonales dans des hyperplans qui délimitent un *domaine fondamental*. Pour en choisir un, on choisit une face (dimension  $d - 1$ ), une face de cette face (dimension  $d - 2$ ; une arête si  $d = 3$ ), et ainsi de suite jusqu'au choix d'un sommet (dimension 0).

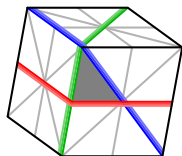
Chaque réflexion génératrice change *un* de ces choix. Ainsi le diagramme du groupe de Coxeter est ordonné et *linéaire*. Les étiquettes du diagramme forment le *symbole de Schläfli* qui caractérise le polytope.









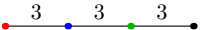
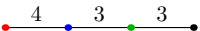
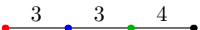

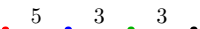
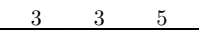
# Domaine fondamental

Les symétries d'un polytope convexe régulier de dimension  $d$  sont engendrées par  $d$  réflexions orthogonales dans des hyperplans qui délimitent un *domaine fondamental*. Pour en choisir un, on choisit une face (dimension  $d - 1$ ), une face de cette face (dimension  $d - 2$ ; une arête si  $d = 3$ ), et ainsi de suite jusqu'au choix d'un sommet (dimension 0).

Chaque réflexion génératrice change *un* de ces choix. Ainsi le diagramme du groupe de Coxeter est ordonné et *linéaire*. Les étiquettes du diagramme forment le *symbole de Schläfli* qui caractérise le polytope.



# Classification des polytopes convexes réguliers

<i>diagramme</i>	<i>polytope</i>	<i>groupe</i>	<i>ordre</i>
	<i>p</i> -gone	$I_2(p)$	$2p$
	tétraèdre	$A_3$	24
	cube	$B_3$	48
	octaèdre	$B_3$	48
	dodécaèdre	$H_3$	120
	icosaèdre	$H_3$	120
	4-simplexe	$A_4$	120
	4-hypercube	$B_4$	384
	4-hyperoctaèdre	$B_4$	384
	24-tope	$F_4$	1152
	120-tope	$H_4$	14400
	600-tope	$H_4$	14400

# Classification des systèmes de racines

La classification des systèmes de racines suit aussi celle de groupes de Coxeter finis, avec conditions additionnelles différentes

Contrairement aux polytopes, le diagramme n'est pas toujours linéaire, ni connexe ; d'autre part la condition cristallographique donne des restrictions.

- $m_{ij} \in \{2, 3, 4, 6\}$  pour  $i \neq j$  ;
- Si  $m_{ij} \in \{4, 6\}$ , l'arête entre  $i$  et  $j$  est orientée (correspondant au rapport des longueurs des racines).

Il reste les types formés de  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $D_n$ ,  $E_6$ ,  $E_7$ ,  $E_8$ ,  $F_4$ ,  $G_2$  ; or l'arête orientée distingue deux types  $C_n$  et  $B_n$ , pour  $n \geq 3$ .

# Classification des systèmes de racines

La classification des systèmes de racines suit aussi celle de groupes de Coxeter finis, avec conditions additionnelles différentes

Contrairement aux polytopes, le diagramme n'est pas toujours linéaire, ni connexe ; d'autre part la condition cristallographique donne des restrictions.

- $m_{i,j} \in \{2, 3, 4, 6\}$  pour  $i \neq j$  ;
- Si  $m_{i,j} \in \{4, 6\}$ , l'arête entre  $i$  et  $j$  est orientée (correspondant au rapport des longueurs des racines).

Il reste les types formés de  $A_n, B_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2$  ; or l'arête orientée distingue deux types  $C_n$  et  $B_n$ , pour  $n \geq 3$ .

# Classification des systèmes de racines

La classification des systèmes de racines suit aussi celle de groupes de Coxeter finis, avec conditions additionnelles différentes

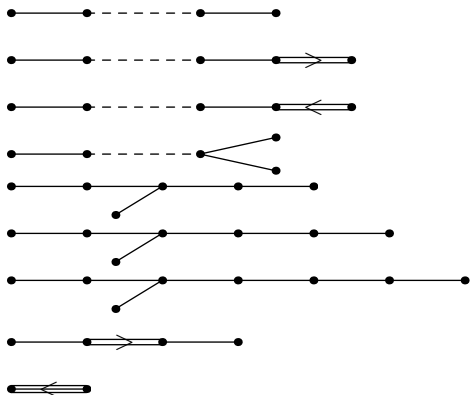
Contrairement aux polytopes, le diagramme n'est pas toujours linéaire, ni connexe ; d'autre part la condition cristallographique donne des restrictions.

- $m_{i,j} \in \{2, 3, 4, 6\}$  pour  $i \neq j$  ;
- Si  $m_{i,j} \in \{4, 6\}$ , l'arête entre  $i$  et  $j$  est orientée (correspondant au rapport des longueurs des racines).

Il reste les types formés de  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $D_n$ ,  $E_6$ ,  $E_7$ ,  $E_8$ ,  $F_4$ ,  $G_2$  ; or l'arête orientée distingue deux types  $C_n$  et  $B_n$ , pour  $n \geq 3$ .

# Classification des systèmes de racines irréductibles

diagramme



type

$\#\Phi$

indice

$A_{n-1}$

$n(n-1)$

$n$

$B_n$

$2n^2$

2

$C_n$

$2n^2$

2

$D_n$

$2n(n-1)$

4

$E_6$

72

3

$E_7$

126

2

$E_8$

240

1

$F_4$

48

1

$G_2$

12

1

# Plan

- 1 Introduction
- 2 Le logiciel `atlas`
- 3 Groupe de Lie, algèbre de Lie, système de racines
- 4 Classifications
- 5 Types classiques et exceptionnels**
- 6 Atlas : mathématiques en construction ?



# Systèmes de racines classiques

*type*    *racines*

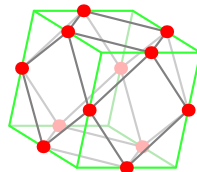
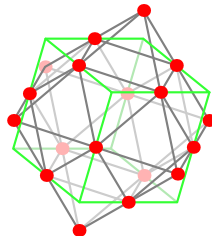
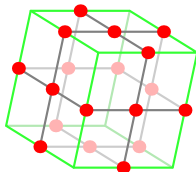
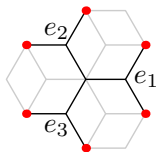
$$A_{n-1} \quad \{ \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j \mid i, j \in \{1, \dots, n\}; i \neq j \}$$

$$B_n \quad \{ \pm \mathbf{e}_i \pm \mathbf{e}_j \mid i, j \in \{1, \dots, n\}; i < j \} \cup \pm \mathcal{E}$$

$$C_n \quad \{ \pm \mathbf{e}_i \pm \mathbf{e}_j \mid i, j \in \{1, \dots, n\}; i < j \} \cup \pm 2\mathcal{E}$$

$$D_n \quad \{ \pm \mathbf{e}_i \pm \mathbf{e}_j \mid i, j \in \{1, \dots, n\}; i < j \}$$

où  $\mathcal{E} = \{ \mathbf{e}_i \mid i \in \{1, \dots, n\} \}$  est la base canonique de  $\mathbf{R}^n$ .



# Un système de racines exceptionnel

L'indice d'un système de racines est l'indice  $[X : Y]$  des réseaux  $Y = \langle \Phi \rangle_{\mathbf{Z}}$  et  $X = \{ v \in \langle \Phi \rangle_{\mathbf{R}} \mid \forall \alpha \in \Phi : s_{\alpha}(v) - v \in \mathbf{Z}\alpha \}$ .

L'ensemble  $\Phi_0 = \pm \mathcal{E}$  est un système de racines de type  $(A_1)^n$ .  
On a  $Y = \mathbf{Z}^n$  et  $X = (\frac{1}{2}\mathbf{Z})^n$  et donc  $[X : Y] = 2^n$ .

Pour  $n \geq 4$  on peut rajouter à  $\Phi_0$  certains éléments de  $X$  comme nouvelles racines de la même longueur 1. Pour  $n = 4$ , l'ensemble  $\Phi_1 = \Phi_0 \cup \{-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\}^4$  de tous les vecteurs unité dans  $X$  forme un système de  $8 + 16 = 24$  racines.

# Un système de racines exceptionnel

L'indice d'un système de racines est l'indice  $[X : Y]$  des réseaux  $Y = \langle \Phi \rangle_{\mathbf{Z}}$  et  $X = \{ v \in \langle \Phi \rangle_{\mathbf{R}} \mid \forall \alpha \in \Phi : s_{\alpha}(v) - v \in \mathbf{Z}\alpha \}$ .

L'ensemble  $\Phi_0 = \pm \mathcal{E}$  est un système de racines de type  $(A_1)^n$ .  
On a  $Y = \mathbf{Z}^n$  et  $X = (\frac{1}{2}\mathbf{Z})^n$  et donc  $[X : Y] = 2^n$ .

Pour  $n \geq 4$  on peut rajouter à  $\Phi_0$  certains éléments de  $X$  comme nouvelles racines de la même longueur 1. Pour  $n = 4$ , l'ensemble  $\Phi_1 = \Phi_0 \cup \{-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\}^4$  de tous les vecteurs unité dans  $X$  forme un système de  $8 + 16 = 24$  racines.

# Un système de racines exceptionnel

L'indice d'un système de racines est l'indice  $[X : Y]$  des réseaux  $Y = \langle \Phi \rangle_{\mathbf{Z}}$  et  $X = \{ v \in \langle \Phi \rangle_{\mathbf{R}} \mid \forall \alpha \in \Phi : s_{\alpha}(v) - v \in \mathbf{Z}\alpha \}$ .

L'ensemble  $\Phi_0 = \pm \mathcal{E}$  est un système de racines de type  $(A_1)^n$ .  
On a  $Y = \mathbf{Z}^n$  et  $X = (\frac{1}{2}\mathbf{Z})^n$  et donc  $[X : Y] = 2^n$ .

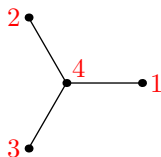
Pour  $n \geq 4$  on peut rajouter à  $\Phi_0$  certains éléments de  $X$  comme nouvelles racines de la même longueur 1. Pour  $n = 4$ , l'ensemble  $\Phi_1 = \Phi_0 \cup \{-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\}^4$  de tous les vecteurs unité dans  $X$  forme un système de  $8 + 16 = 24$  racines.

# Le système de racines exceptionnel $F_4$

Ce système  $\Phi_1$  est d'indice 4 (l'indice du système  $A_4$  est 5).

En effet  $\Phi_1$  est de type  $D_4$ , avec comme «racines simples» :

$$\begin{array}{l} \alpha_1 \quad (0, \quad 0, \quad 0, \quad 1) \\ \alpha_2 \quad (0, \quad 0, \quad 1, \quad 0) \\ \alpha_3 \quad (0, \quad 1, \quad 0, \quad 0) \\ \alpha_4 \quad (+\frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2}) \end{array}$$



Mais la forme «habituelle» du système de racines de type  $D_4$ , qui  $\Phi_2 = \{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \leq i < j \leq 4\}$ . En identifiant  $\mathbf{R}^4 \cong \mathbf{H}$ , la multiplication par  $1 + \mathbf{i}$  définit un isomorphisme  $\Phi_1 \rightarrow \Phi_2$ .

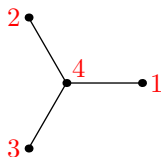
$\Phi_3 = \Phi_1 \cup \Phi_2$  est un système de racines de type  $F_4$ .

# Le système de racines exceptionnel $F_4$

Ce système  $\Phi_1$  est d'indice 4 (l'indice du système  $A_4$  est 5).

En effet  $\Phi_1$  est de type  $D_4$ , avec comme «racines simples» :

$$\begin{array}{l} \alpha_1 \quad (0, \quad 0, \quad 0, \quad 1) \\ \alpha_2 \quad (0, \quad 0, \quad 1, \quad 0) \\ \alpha_3 \quad (0, \quad 1, \quad 0, \quad 0) \\ \alpha_4 \quad (+\frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2}) \end{array}$$



Mais la forme «habituelle» du système de racines de type  $D_4$ , qui  $\Phi_2 = \{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \leq i < j \leq 4\}$ . En identifiant  $\mathbf{R}^4 \cong \mathbf{H}$ , la multiplication par  $1 + \mathbf{i}$  définit un isomorphisme  $\Phi_1 \rightarrow \Phi_2$ .

$\Phi_3 = \Phi_1 \cup \Phi_2$  est un système de racines de type  $F_4$ .

# Un système de racines encore plus exceptionnel

Une construction similaire est possible à partir des systèmes de racines de type  $D_n$ . Le système

$\Phi_0 = \{ \pm e_i \pm e_j \mid i, j \in \{1, \dots, n\}; i < j \}$  engendre le réseau

$Y = \langle \Phi \rangle_{\mathbf{Z}} = \{ v \in \mathbf{Z}^n \mid \sum_i v_i \in 2\mathbf{Z} \}$ . Le réseau

$X = \{ v \in \langle \Phi \rangle_{\mathbf{R}} \mid \forall \alpha \in \Phi : s_{\alpha}(v) - v \in \mathbf{Z}\alpha \}$  est égal à

$\mathbf{Z}^n \cup ((\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}) + \mathbf{Z}^n)$ . L'indice  $[X : Y]$  de  $\Phi_0$  est 4.

Uniquement pour  $n = 8$  on peut étendre  $\Phi_0$  avec d'autres racines de la même longueur  $\sqrt{2}$  dans  $X$ . L'orbite  $S$  (sous le groupe de Weyl) de  $v = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  est formée des 128 vecteurs (changements d'un nombre *pair* de signes).

$\Phi_1 = \Phi_0 \cup S$  forme un système de  $112 + 128 = 240$  racines ; c'est un système de racines de type  $E_8$ .

# Un système de racines encore plus exceptionnel

Une construction similaire est possible à partir des systèmes de racines de type  $D_n$ . Le système

$\Phi_0 = \{ \pm e_i \pm e_j \mid i, j \in \{1, \dots, n\}; i < j \}$  engendre le réseau

$Y = \langle \Phi \rangle_{\mathbf{Z}} = \{ v \in \mathbf{Z}^n \mid \sum_i v_i \in 2\mathbf{Z} \}$ . Le réseau

$X = \{ v \in \langle \Phi \rangle_{\mathbf{R}} \mid \forall \alpha \in \Phi : s_{\alpha}(v) - v \in \mathbf{Z}\alpha \}$  est égal à

$\mathbf{Z}^n \cup ((\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}) + \mathbf{Z}^n)$ . L'indice  $[X : Y]$  de  $\Phi_0$  est 4.

Uniquement pour  $n = 8$  on peut étendre  $\Phi_0$  avec d'autres racines de la même longueur  $\sqrt{2}$  dans  $X$ . L'orbite  $S$  (sous le groupe de Weyl) de  $v = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  est formée des 128 vecteurs (changements d'un nombre pair de signes).

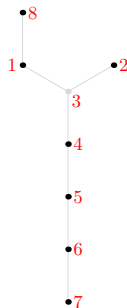
$\Phi_1 = \Phi_0 \cup S$  forme un système de  $112 + 128 = 240$  racines ; c'est un système de racines de type  $E_8$ .



# Les racines simples du système de type $E_8$

On peut décrire  $\Phi_1$  comme l'ensemble de vecteurs de longueur  $\sqrt{2}$  dans le réseau  $Y \cup ((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + Y)$  dans  $\mathbf{R}^8$ .

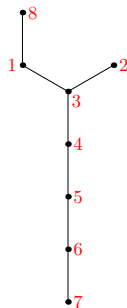
$\alpha_1$	(0,	0,	0,	0,	0,	0,	1,	-1)
$\alpha_2$	(0,	0,	0,	0,	0,	0,	1,	1)
$\alpha_3$	(0,	0,	0,	0,	0,	1,	-1,	0)
$\alpha_4$	(0,	0,	0,	0,	1,	-1,	0,	0)
$\alpha_5$	(0,	0,	0,	1,	-1,	0,	0,	0)
$\alpha_6$	(0,	0,	1,	-1,	0,	0,	0,	0)
$\alpha_7$	(0,	1,	-1,	0,	0,	0,	0,	0)
$\alpha_8$	( $+\frac{1}{2}$ ,	$-\frac{1}{2}$ ,	$-\frac{1}{2}$ ,	$-\frac{1}{2}$ ,	$-\frac{1}{2}$ ,	$-\frac{1}{2}$ ,	$-\frac{1}{2}$ ,	$+\frac{1}{2}$ )



# Les racines simples du système de type $E_8$

On peut décrire  $\Phi_1$  comme l'ensemble de vecteurs de longueur  $\sqrt{2}$  dans le réseau  $Y \cup ((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + Y)$  dans  $\mathbf{R}^8$ .

$\alpha_1$	(0,	0,	0,	0,	0,	0,	1,	-1)
$\alpha_2$	(0,	0,	0,	0,	0,	0,	1,	1)
$\alpha_3$	(0,	0,	0,	0,	0,	1,	-1,	0)
$\alpha_4$	(0,	0,	0,	0,	1,	-1,	0,	0)
$\alpha_5$	(0,	0,	0,	1,	-1,	0,	0,	0)
$\alpha_6$	(0,	0,	1,	-1,	0,	0,	0,	0)
$\alpha_7$	(0,	1,	-1,	0,	0,	0,	0,	0)
$\alpha_8$	( $+\frac{1}{2}$ ,	$-\frac{1}{2}$ ,	$-\frac{1}{2}$ ,	$-\frac{1}{2}$ ,	$-\frac{1}{2}$ ,	$-\frac{1}{2}$ ,	$-\frac{1}{2}$ ,	$+\frac{1}{2}$ )



# Plan

- 1 Introduction
- 2 Le logiciel `atlas`
- 3 Groupe de Lie, algèbre de Lie, système de racines
- 4 Classifications
- 5 Types classiques et exceptionnels
- 6 Atlas : mathématiques en construction ?

## Approche constructive

Pour permettre d'effectuer des calculs, il est nécessaire d'envisager des représentations concrètes pour les notions abstraites. En algèbre, il faut se limiter aux choses *discrètes*.

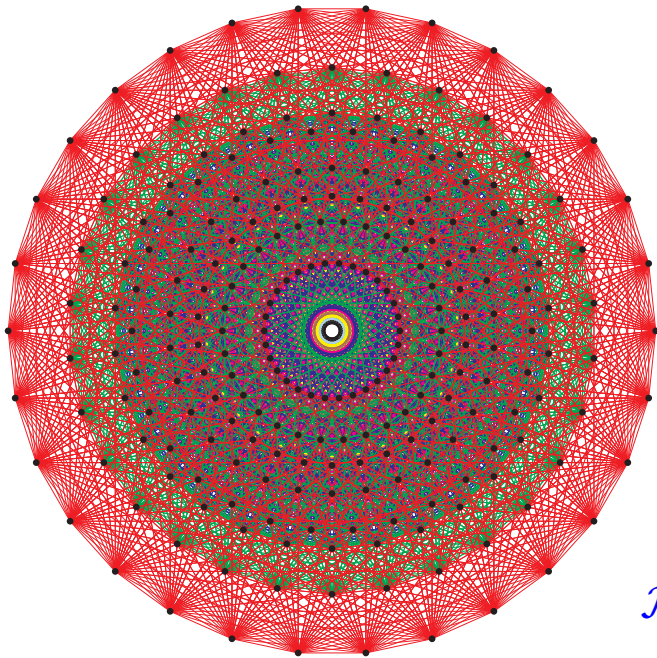
Par exemple, les groupes de Lie réels considérés dans "Atlas" sont les points fixes d'une "forme réelle" (généralisation de conjugaison complexe) dans un groupe complexe : dans  $\mathbf{SL}_2(\mathbf{C})$  deux formes réelles différentes définissent les groupes réels  $\mathbf{SL}_2(\mathbf{R})$  et  $\mathbf{SU}_2$ .

Ces formes réelles ne peuvent pas être représentés telles quelles. Par contre, on peut représenter une *involution du système de racines* de  $\mathbf{SL}_2(\mathbf{C})$ . Dans **atlas**, toutes les notions sont ainsi codées de façon indirecte mais discrète.

# Construction de mathématiques ?

Les mathématiques implémentées dans **atlas** sont en partie très anciennes, et datent en tout cas d'au moins une décennie. Néanmoins, l'effort de concrétiser ce qui est "connu" sous forme abstraite influe sur les mathématiques :

- La représentation concrète force parfois un point de vue inusuel, que entraîne une nouvelle réflexion ;
- La vérification par le calcul montre parfois que certains énoncés sont incomplets ou inexacts ;
- Des résultats d'un calcul peuvent suggérer de nouveaux énoncés, ou des précisions de résultats connus.



*FIN*