

ANNEE 2009 Avertissement : L'utilisation de calculatrices, de règles à calcul, de formules et de papier millimétré n'est pas autorisée. Il ne sera pas fait usage d'encre rouge. Il sera tenu compte de la qualité de la présentation des copies et de l'orthographe. Le candidat traitera les trois exercices en respectant les notations du texte et la numérotation des questions. Aucun document ne sera rendu avec la copie. Les réponses de l'exercice n01 (QCM) seront données sur une grille prévue à cet effet. Les exercices n02 et n03 seront traités sur une copie à part.

1) Exercice n01 (8 points) On considère la fonction réelle f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = xe^{-x}$, et on note C sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; i; j)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, donner une expression de $f'(x)$. Etudier le sens de variation de f sur \mathbb{R} . Etudier les limites de faux bornes de son ensemble de définition. Donner une équation de la tangente à C au point d'abscisse 0 . Soit $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. Prouver que l'aire, en unité d'aires, de la portion de plan comprise entre C , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = m$ est égale à $-(m+1)e^{-m}$. Quelle est la valeur limite de cette aire lorsque m tend vers $+\infty$?

6) On considère la suite (u_n) définie par : $u_1 = 1$, et, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}(1 + u_n)$. Calculer u_2 , u_3 et u_4 . Conjecturer une expression de u_n en fonction de n puis démontrer cette conjecture. En utilisant les questions précédentes, déterminer le sens de variation de (u_n) puis sa limite.

II) Exercice n02 (6 points) Résoudre dans l'ensemble \mathbb{C} des complexes l'équation suivante : $z^2 - 8z + 25 = 0$. Dans le plan complexe muni du repère orthonormal direct $(O; i; j)$, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 4 + 3i$ et $z_B = 1 + 7i$.

a) Calculer $z_A - z_B$? On donnera le résultat sous forme algébrique. $z_A - z_B$ b) Interpréter géométriquement le résultat obtenu, et en déduire la nature du triangle OAB .

3) Soit I le milieu de $[OB]$. On désigne par C le symétrique de A par rapport à I . Quelle est l'affixe du point C ? Que peut-on en déduire concernant le quadrilatère $OABC$?

III) Exercice n03 (6 points) Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmations A, B, C ou D est exacte. On demande au candidat de signaler sans justification la réponse qui lui paraît exacte en répondant sur la grille prévue à cet effet. Toute réponse juste est comptée +0,5 point. Toute réponse fautive est comptée -0,25 point. Une absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

Pour les quatre premières questions, on considère une fonction f définie sur $]0; +\infty[$, dont on note C la représentation graphique dans un repère orthonormal $(O; i; j)$ et dont le tableau de variations est le suivant :

$f'(x)$

- 0 + 0 - 0 +

5 3

2 $f(x)$

$\ln(1/x) - 2/x$ On peut alors affirmer que :

1) L'équation $f(x) = 0$ admet : A) 0 solution

2) La courbe C : A) n'admet aucune asymptote B) admet une unique asymptote C) admet 2 asymptotes D) admet 3 asymptotes ou plus

3) La tangente à C au point d'abscisse 3 peut avoir pour équation : A) $y = 2x + 4$ B) $y = -x + 5$ C) $y = -4$ D) $x = 3$

4) Le réel $1 = \int_1^e f(x) dx$ vérifie la relation : A) $1/2 = 6$ B) $1/2 = 1/4$ C) $0 = 1/2$ D) $1 = 1/2$

5) f_1 est égale à : A) $\ln 2 - \ln x$ B) $2C) 3D) 1/x$

6) La valeur moyenne sur $[0; 2]$ de la fonction $f : x \mapsto 2e^x - 1$ est : A) $e + 1$ B) $2(e - 1)$ C) $12(e - 1)$ D) $e - 17$

7) Soient A et B deux événements tels que $P(A \cap B) = p$, $P(A) = 0,55$, $P(B) = 0,3$. Dans un loterie de fête foraine, on considère que le nombre de billets seufs est la somme

de deux variables aléatoires indépendantes X et Y telles que $X \sim \mathcal{U}(0; 1)$ et $Y \sim \mathcal{U}(0; 1)$. On considère l'équation différentielle $(E) :$

$2y' - 3y = 6$. Une fonction solution de (E) est : A) $3e^{3x} - 3$ B) $2e^{3x} - 3$ C) $3e^{3x} - 3$ D) $2e^{3x} - 3$

8) Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites réelles telles que (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante. On suppose de plus que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq v_n \geq w_n$. On peut alors affirmer que :

A) (u_n) diverge B) (u_n) et (v_n) sont adjacentes C) (v_n) converge D) (w_n) converge

9) Soient A , B et C trois points non alignés de l'espace. Parmi les égalités suivantes, quelle est celle pour laquelle l'ensemble des points M solutions est une sphère de

l'espace ?

C) $\vec{MA} + \vec{MB} = \vec{MC}$ D) $(\vec{MA} + \vec{MB}) \cdot (\vec{MA} - \vec{MB}) = 0$ 12) L'espace étant rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, le plan d'équation $3x - z + 1 = 0$ est parallèle à : A) l'axe $(O; \vec{i})$
B) l'axe $(O; \vec{j})$ C) le plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$ D) la droite passant par O et de vecteur directeur $\vec{d} (3; 0; -1)$ [