Baccalauréat C Lyon juin 1973

EXERCICE 1

On considère le polynôme à variable complexe :

$$f(z) = z^4 - 4(1+\mathrm{i})z^3 + 12\mathrm{i}z^2 - 8\mathrm{i}(1+\mathrm{i})z - 5$$

1. Calculer $f(z)$ pour les valeurs $z = 1$ et $z = \mathrm{i}$ puis factoriser le polynome $f(z)$.
2. Résoudre l'équation $f(z) = 0$; on notera z_1, z_2, z_3, z_4 les solutions de cette équation et on construira les images m_1, m_2, m_3, m_4 de ces complexes dans le plan affine muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ orthonormé.

EXERCICE 2

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2\log_x y + 2\log_y x & = & -5\\ xy & = & \mathrm{e} \end{array}\right.$$

dont l'inconnue est le couple de réels $(x~;~y)$.

PROBLÈME

a et b désignent deux nombres réels. V est un espace vectoriel de dimension 2 muni d'une base $\mathcal{B} = \left\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right\}$.
Soit $\mathcal{E}$ un espace affine admettant V pour espace vectoriel associé. O est un point de $\mathcal{E}$. On munit $\mathcal{E}$ du repère cartésien $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie A

Pour chaque valeur du couple $(a~;~b)$, on considère l'endomorphisme de V noté $\varphi_{(a,~b)}$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\begin{pmatrix} a-1 & -2a\\ 2ab & b(a-1) \end{pmatrix}$$

1. Quels sont tous les endomorphismes $\varphi_{(a,~b)}$ bijectifs ? Déterminer le noyau de $\varphi_{(a,~b)}$. On discutera suivant les valeurs du couple $(a~;~b)$.
   Préciser en particulier le noyau de $\varphi_{(1,~0)}$ et donner une base de ce sous-espace.
2. b est supposé non nul dans cette question. Quel est l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ de V pour lesquels il existe un réel λ tel que $\varphi_{(0,~b)}\left(\vec{u}\right) = \lambda\vec{u}$?
3. On suppose dans cette question V euclidien et la base $\mathcal{B}$ orthonormée.
   Déterminer tous les endomorphismes $\varphi_{(a,~b)}$ qui sont des isométries vectorielles et en préciser la nature.

Partie B

On se place maintenant dans l'espace affine $\mathcal{E}$ et on considère toutes les applications affines notées $f_{(a,~b)}$ dont l'endomorphisme associé est $\varphi_{(a,~b)}$ et admettant O pour point invariant.

1. a est un réel donné. Déterminer toutes les droites de b dont l'image par $f_{(a,~0)}$ n'est pas une droite.

2. b est un réel non nul. Déterminer toutes les droites de b transformées par $f_{(0,\ b)}$ en droites parallèles à elles-mêmes.
3. **a.** Soit l'application $f_{(1,\ -\frac{1}{4})}$. Montrer qu'elle est involutive.

   Soit les points A de coordonnées 2 et -1 ; B de coordonnées -2 et 1 ; C de coordonnées 2 et 1.

   Déterminer les images de ces trois points par $f_{(1,\ -\frac{1}{4})}$.

   Préciser alors la nature de $f_{(1,\ -\frac{1}{4})}$.

   b. Soit H l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{1}{2}$. On pose :

$$g = H \circ f_{(1,\ -\frac{1}{4})}$$

   On note C_1 l'image de C par g, et pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on note C_n l'image de C_{n-1} par g.

$$C_1 = g(C),\ C_2 = g\left(C_1\right),\ C_3 = g\left(C_2\right),\ \ldots,\ C_n = g\left(C_{n-1}\right).$$

   Soit α_n et β_n les coordonnées de C_n. Calculer α_n et β_n en fonction de n.

   Soit M l'isobarycentre (ou centre de gravité) du triangle ABC. M_1 est l'image de M par g et pour tout $n \geqslant 2$: M_n est l'image de M_{n-1} par g.

   Calculer en fonction de n les coordonnées x_n et y_n de M_n puis $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$ et $\displaystyle\lim_{n\to\infty} y_n$. Une figure est vivement conseillée.

Partie C

On suppose maintenant V euclidien et la base $\mathcal{B}$ orthonormée. $\mathcal{E}\mathcal{R}$ est alors un espace métrique orienté par $\mathcal{B}$.

1. Déterminer toutes les applications $f_{(a,\ b)}$ qui sont des isométries affines.
2. Montrer que toutes les applications $f_{(a,\ b)}$ avec $b^2 = 1$ sont des similitudes, éventuellement réduites à des isométries.

   Déterminer le centre, le rapport et l'angle de similitude $f_{(-1,\ 1)}$.