Baccalauréat C Lyon septembre 1970

EXERCICE 1

EXERCICE 1

1. Rappeler la définition du quotient et du reste de la division euclidienne du polynôme $X^2 - 1$ par le polynôme $2X - 1$ (où ces polynômes sont à coefficients réels).

   Calculer ce quotient et ce reste.
2. Déterminer une primitive de la fonction numérique

$$x \longmapsto \frac{\cos^3 x}{1 - 2\sin x}, \quad \text{definie dans } \left]0\,;\, \frac{\pi}{6}\right[$$

EXERCICE 2

On rappelle que le nombre des parties d'un ensemble fini, E, ayant n éléments est 2^{n}".

1. En utilisant les congruences, étudier les restes possibles de la division par 5 d'une puissance de 2.
2. On désigne par F l'ensemble des parties de l'ensemble E de n éléments et par G l'ensemble des parties de F. On écrit, dans le système à base 5, le nombre, m, des éléments de G. Quel est, suivant les valeurs de n, le chiffre des unités de m ?

EXERCICE 3

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(\mathrm{O}x, \mathrm{O}y)$, on considère les droites (D) et (D') d'équations respectives $y = mx$ et $y = -mx$, où m est un nombre réel tel que $0 < m < 1$.
On considère, sur $\mathrm{O}x$, le point d'abscisse a, où a est un nombre réel positif et l'on désigne par (Δ) une droite variable de pente p différente de 0, passant par A.

1. Calculer les coordonnées du point M où (Δ) coupe (D) et du point M' où (Δ) coupe (D'). Écrire l'équation du cercle (C) de diamètre MM'.
2. Soit L la polaire de O par rapport au cercle (C).

   Montrer que, pour qu'un point P appartienne à L, il faut et il suffit que $\overrightarrow{\mathrm{BO}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BP}} = r^2$, où B est le centre de (C) et r le rayon de (C). En déduire l'équation de L.
3. Montrer analytiquement que L passe par un point fixe quand p varie. Montrer géométriquement que (C) reste orthogonal à un cercle fixe quand p varie.
4. On considère l'inversion de centre O et de puissance a^2. Calculer les coordonnées du transformé P de M par cette inversion et celles du transformé P' de M'. Former l'équation du cercle (Γ) de diamètre PP'.
5. Prouver qu'il existe une ellipse (E) (dont on précisera le centre, les foyers et les sommets) telle que, par tout point intérieur à (E), ne passe aucun cercle (Γ) et que, par tout point extérieur à (E), passent deux cercles (Γ), (E) étant l'ensemble des points par où passe un seul cercle (Γ).