Durée : 4 heures

Baccalauréat C Lyon juin 1969

EXERCICE 1

1. Étudier les variations de la fonction f de la variable réelle x définie par

$$x \longmapsto f(x) = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2x}.$$

Tracer son graphe, (C), dans un repère orthonormé.

2. Calculer, en fonction de a, l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe (C) et les deux droites ayant pour équations $x = \frac{1}{2}$ et $x = a\,(a > 0)$.
Cette aire a-t-elle une limite finie lorsque a tend vers 0i et lorsque a tend vers l'infini ?

EXERCICE 2

Résoudre l'équation

$$z^3 = -\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{6},$$

z désignant un nombre complexe.
(On donnera les valeurs approchées des parties réelles et des parties imaginaires des solutions à 0,01 près.)

PROBLÈME

On considère les coniques (C_a) ayant pour équation, dans un repère orthonormé $x\mathrm{O}y$,

$$y^2 = ax^2 + 2x - 1,$$

où a est un paramètre réel supérieur ou égal à -1.

1. Indiquer, suivant les valeurs de a, la nature de la conique (C_a). Préciser le centre éventuel, le ou les foyers, le ou les sommets et les asymptotes éventuelles.
2. On s'intéresse à toutes celles des coniques (C_a) qui sont des ellipses. Quel est l'ensemble des sommets de leurs petits axes ?
3. On s'intéresse à toutes celles des coniques (C_a) qui sont des hyperboles. Démontrer que les tangentes à la parabole ayant pour équation $y^2 = 4x$, autres que la tangente au sommet, forment le même ensemble que toutes les asymptotes de ces hyperboles.
4. Toutes les coniques (C_a) ont un foyer fixe, F.
En désignant par M un point quelconque d'une de ces coniques (C_a) et par θ l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{O}x}, \overrightarrow{\mathrm{F}M}\right)$, calculer la longueur $r = \mathrm{FM}$ en fonction de a et de θ.

N. B. - On tiendra compte de la rédaction et de la présentation.