Durée : 4 heures

Baccalauréat C Lyon juin 1972

EXERCICE 1

Les nombres x, y et z étant trois entiers naturels, on suppose que l'écriture en base x de y est 131, que l'écriture en base x de z est 101.

1. Montrer que l'on peut, sans connaître x, exprimer, dans le système de base x, le produit xyz.
2. Sachant que, de plus, la somme $x+y+z$ est égale, dans le système décimal, au nombre 50, déterminer, dans le système décimal, le nombre x et le produit xyz.

EXERCICE 2

Soit n un entier naturel strictement positif.
On considère la fonction numérique f de la variable réelle x qui à x associe

$$f(x) = \frac{\text{Log}\, x}{x^n}$$

(Log x désigne le logarithme népérien de x).

1. Étudier le sens des variations de la fonction f.
   Tracer, pour $n = 2$, sa courbe représentative.
2. Soit a un nombre réel strictement supérieur à 1 ; calculer

$$g(a) = \int_1^a \frac{\text{Log}\, t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

PROBLÈME

On donne un nombre réel a strictement positif et un plan affine euclidien (P), rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$. À tout point, M, de coordonnées $(x\,;\,y)$ dans ce plan, on associe le nombre complexe $z = x+\text{i}y$, que l'on appelle affixe de M. Soit A, et A' les points d'affixes respectives a et $-a$.
Soit $(\text{P}^\star)$ le plan (P) privé du point A.
On définit l'application, T, de $(\text{P}^\star)$ dans (P), qui, à chaque point $M \in (\text{P}^\star)$, associe le point M' tel que

$$\left\{\begin{array}{lll} \overrightarrow{\text{A}M}\cdot\overrightarrow{MM'} & = & 0\\ \text{et} & & \\ \overrightarrow{\text{A}M} \text{ et } \overrightarrow{\text{A}'M'} & & \text{appartiennent à la même droite vectorielle.}\end{array}\right.$$

($\overrightarrow{\text{A}M}\cdot\overrightarrow{MM'}$ désigne le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{\text{A}M}$ et $\overrightarrow{MM'}$.)

Partie A

1. Donner une construction géométrique de M' à partir de M.
   Construire les images des points, M_1 et M_2 d'affixes respectives $2a+\text{i}a$ et $2a$, et celle d'un point arbitraire, $M3_3$ du cercle de diamètre [AA′] (M_3 étant distinct de A).

2. Soit $z' = x' + \text{i}y'$ l'affixe de $M' = T(M)$. Calculer x' et y' en fonction de x et de y. Montrer que, si $\overline{z} = x - \text{i}y$ est le nombre complexe conjugué de z, on a

$$z' = \frac{\overline{z}(z-a)}{\overline{z}-a}.$$

Comparer les modules de z et de z'.

3. Déterminer les points de $\left(\text{P}^{\star}\right)$ qui sont invariants par T.

Quelle est l'image par T d'un cercle de centre O et de rayon R ? (On devra distinguer le cas exceptionnel où $R = a$.) L'application T est-elle injective ?

Partie B

On donne un point M_0 de $\left(\text{P}^{\star}\right)$, non situé sur la droite (AA$'$) ni sur le cercle de diamètre [AA$'$]. On désigne son affixe par z_0 et le module de cette affixe par R tel que $R = |z_0|$.
À partir de M_0, on construit la suite des points $M_1,\ M_2, \ldots,\ M_n, \ldots$ d'affixes $z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n,\ \ldots$, telle que, pour tout entier naturel n, on ait $M_{n+1} = T\left(M_n\right)$.

1. Que peut-on dire du module de z_n, pour tout $n \neq 0$? En déduire la valeur du produit $z_n\overline{z_n}$.

Montrer que l'on peut écrire

$$z_{n+1} = \frac{R^2\left(z_n - a\right)}{R^2 - az_n}.$$

2. On considère la suite à termes complexes définie par

$$u_n = \frac{z_n + R}{z_n - R}$$

pour tout $n \neq 0$.

Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire l'expression de u_n en fonction de n, u_0 et $k = \dfrac{R-a}{R+a}$, puis montrer que l'on a +a

$$z_n + R = \frac{2Rk^n u_0}{k^n u_0 - 1}$$

En déduire la limite de la suite réelle de terme général $|z_n + R|$, lorsque n augmente indéfiniment.