ൾ Baccalauréat C Lyon juin 1974 ൿ

EXERCICE 1 **5 POINTS**

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 - 3(1+\mathrm{i})z + 4\mathrm{i} = 0$$

   On appellera z_1 la racine ayant le plus petit module, z_2 l'autre racine.

2. Dans le plan affine euclidien orienté rapporté au repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}\,;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ soit les points M_1 et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2. Déterminer le centre Ω, le rapport et l'angle de la similitude directe qui à M_1 associe M_2 et au point O le point O$'$ d'affixe 2i.

EXERCICE 2 **5 POINTS**

Soit P un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ et D la droite de P d'équation :

$$3x + 4y - 1 = 0.$$

1. Déterminer l'ensemble H de D dont les coordonnées sont des entiers relatifs.
2. Quel est l'ensemble H' des points de H dont le carré de la distance à O est un multiple de 13 ?

PROBLÈME **5 POINTS**

Partie A

Soit $\mathscr{E}$ un plan affine muni d'un repère $\left(\mathrm{O}\,;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$, E son espace vectoriel associé.

Partie A

Pour tout couple $(a\,;\ b)$ de réels, on définit une application linéaire de E dans E, notée $F_{a,\ b}$ dont la matrice dans la base $\left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ est

$$M_{a,\ b} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ a & a+b \end{pmatrix}$$

1. À quelle condition est-elle bijective ? Dans le cas où elle ne l'est pas, déterminer son noyau et son image ; pour quels couples $(a\,;\ b)$ ces sous-espaces vectoriels sont-ils non supplémentaires dans E ?
2. Quelles sont les applications $F_{a,\ b}$ involutives ? Définir géométriquement $F_{0,\ -1}$.
3. Existe-t-il une application $F_{a,\ b}$ vérifiant $F_{a,\ b} \circ F_{a,\ b} = F_{a,\ b}$?
   Définir géométriquement $F_{0,\ 0}$.

Partie B

Pour tout couple $(a\,;\ b)$ de réels, on définit une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, notée $g_{a,\ b}$ de la manière suivante :

$$g_{a,\ b}(x) = (ax+b)\mathrm{e}^x$$

pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$.
On note G, l'ensemble des applications $g_{a,\ b}$ ainsi définies.
On suppose, dans toute cette partie, E euclidien et la base $\left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ orthonormée.

1. G est muni des lois de composition usuelles (l'addition des applications notée + et la multiplication externe par un réel notée $\bullet$). Montrer que $(G,\ +,\ \bullet)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont $\left(g_{1,\,0},\ g_{0,\,1}\right)$ est une base notée $\mathscr{B}$.

   a. Démontrer que tout élément de G admet une dérivée, élément de G.

   b. Démontrer que l'application $\theta : G \to G$ qui à $g_{a,\,b}$ associe $g'_{a,\,b}$ est un isomorphisme de l'espace vectoriel G sur lui-même.

2. Montrer que tout élément de G a une primitive unique appartenant à G.

3. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x\text{e}^x - x + 1.$$

   a. Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Quel est le signe de $f''(x)$?
   Calculer $f'(0)$. Déduire de ce qui précède l'étude du signe de $f'(x)$.

   b. Construire dans $\mathscr{E}$, relativement au repère $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ la représentation graphique Γ de f.

   c. Soit λ un réel négatif. Calculer l'aire $\mathscr{A}(\lambda)$ du domaine quarrable, ensemble des points dont les coordonnées $(x\,;\ y)$ vérifient

$$\lambda \leqslant x \leqslant 0 \quad \text{et} \quad f(x) \leqslant y \leqslant -x+1$$

   d. Déterminer la limite de $\mathscr{A}(\lambda)$ quand λ tend vers moins l'infini.

4. Soit g l'application affine de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ associée à $F_{1,\,0}$ qui laisse invariant le point de coordonnées $(1\,;\,0)$. Montrer que l'image par g de Γ est, relativement à $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, la représentation graphique d'une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ à déterminer.