Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C juin 1975 Lyon ∽

EXERCICE 1

z désignant l'affixe d'un point M du plan complexe P, soit f et g les applications de P dans P définies par :

$$\begin{array}{llcll} f: & M(z) & \longmapsto & M'\left(z'\right) & \text{avec} \quad z' = z^2\\ g: & M(z) & \longmapsto & M'\left(z'\right) & \text{avec} \quad z' = \left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)z^2+\mathrm{i}\end{array}$$

1. Montrer qu'il existe une similitude directe s telle que $g = s \circ f$. Préciser le centre, le rapport et l'angle de s.
2. Soit h l'application de P dans P définie par :
   $h : M(z) \longmapsto M'\left(z'\right)$ avec

   $$z' = \left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)z^2+2\mathrm{i}\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)z-\sqrt{3}.$$

   Montrer qu'il existe une translation t telle que $h = g \circ t$. Préciser le vecteur de t.

EXERCICE 2

Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n les restes dans la division par 7 des entiers naturels 2^n et 3^n.
En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que

$$2^n+3^n \equiv 0 \qquad (\text{mod } 7)$$

PROBLÈME

Soit E l'ensemble des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}-\{2\}$ par

$$f_{a,\,b}(x) = a+\frac{b}{x-2} \quad \text{avec } (a\,;\,b) \in \mathbb{R}^2$$

Partie A

1. On considère l'espace vectoriel des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}-\{2\}$, muni des lois usuelles d'addition de deux fonctions et de multiplication d'une fonction par un réel.
   Montrer que E en est un sous-espace vectoriel.
2. Montrer que $\left(f_{1,\,0},\ f_{0,\,1}\right)$ est une base de E, notée $\mathcal{B}$. Donner les coordonnées de $f_{a,\,b}$ dans cette base $\mathcal{B}$.
3. Montrer que les fonctions g définies sur $\mathbb{R}-\{2\}$ par

   $$g(x) = \frac{cx+d}{x-2} \quad \text{avec } (c\,;\,d) \in \mathbb{R}^2$$

   sont des éléments de E. Trouver leurs coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

4. $f_{a,\,b}$ étant un élément quelconque de E et $f_{a,\,b}^{(n)}$ sa dérivée d'ordre n, n étant un élément de $\mathbb{N}^{\star}$, déterminer par récurrence $f_{a,\,b}^{(n)}$ et montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}-\{2\}$ par :

$$h(x) = (x-2)^n f_{a,\,b}(x)$$

est élément de E. Trouver ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$.

Partie B

Pour tout couple de réels $(\alpha\,;\,\beta)$ on désigne par : $\varphi_{\alpha,\,\beta}$ l'application de E dans E telle que $\varphi_{\alpha,\,\beta}\left(f_{a,\,b}\right)$ est définie par :

$$\varphi_{\alpha,\,\beta}\left(f_{a,\,b}\right) : x \longmapsto \alpha f a_{a,\,b}(x) + \beta(x-2) f'_{a,\,b}(x)$$

1. Montrer que $\varphi_{\alpha,\,\beta}$ est un endomorphisme de E et trouver sa matrice dans la base $\mathscr{B} = \left(f_{1,\,0},\ f_{0,\,1}\right)$.
2. Calculer α et β pour que $\varphi_{\alpha,\,\beta}$ soit un endomorphisme involutif et dans chacun des cas préciser la nature de $\varphi_{\alpha,\,\beta}$ et préciser ses éléments remarquables.

Partie C

1. Montrer que, quel que soit le couple $(a\,;\,b)$ de nombres réels, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \left(f_{a,\,b}(x)\right)^2\,\mathrm{d}x$ est positive ou nulle.
   On admettra que cette intégrale est nulle si, et seulement si, $(a\,;\,b) = (0\,;\,0)$.
   Calculer cette intégrale. En déduire que $1 - 2\mathrm{Log}^2 2 > 0$.
2. Soit Φ l'application de E $\times$ E vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\Phi\left(f_{a,\,b},\ f_{a',\,b'}\right) = \int_0^1 f_{a,\,b}(x) \times f_{a',\,b'}(x)\,\mathrm{d}x$$

   Montrer que Φ définit un produit scalaire sur E.
   On suppose dans les deux questions suivantes que E est muni de ce produit scalaire,
3. Calculer $\left\|f_{1,\,0}\right\|$.
   Déterminer $f_{a,\,b}$ telle que $\left(f_{1,\,0},\ f_{a,\,b}\right)$ soit une base orthonormée $\mathscr{B}'$ de E et que b soit positif.
4. Soit μ l'application de E dans E telle que : $\mu\left(f_{a,\,b}\right)$ est définie par :

$$\mu\left(f_{a,\,b}\right) : x \longmapsto 2b\mathrm{Log}\,2 - a + \frac{b}{x-2}$$

   Montrer que μ est une isométrie vectorielle de E. Déterminer les éléments de E invariants par μ. Quelle est la matrice de μ dans la base $\mathscr{B}'$?

N. B. - Les parties B et C sont indépendantes.