Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Lyon juin 1976 ∽

EXERCICE 1

Soit la fonction numérique f de la variable réelle définie par : 2 -2x

$$f(x) = x^2\mathrm{e}^{-2x}.$$

1. Étudier et représenter graphiquement cette fonction dans un repère orthonormé.
2. Calculer l'aire du domaine plan délimité par les axes de coordonnées, la courbe représentative de f et de la droite d'équation $x = \alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}_+^\star$.
   Cette aire admet-elle une limite lorsque α tend vers $+\infty$?

EXERCICE 2

On considère l'ensemble $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{\dot{O},\ \dot{1},\ \dot{2},\ \dot{3}\}$.

1. Dresser la table de multiplication de l'anneau $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ l'équation $\dot{2}x = \dot{2}$
3. Résoudre dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ le système

$$\left\{\begin{array}{rcl}\dot{2}x + \dot{3}y & = & \dot{2}\\ \dot{2}x + \dot{1}y & = & \dot{2}\end{array}\right.$$

4. Résoudre dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ l'équation $\dot{2}x^2 + \dot{2}x = \dot{O}$.

PROBLÈME

N.B. - Les parties A, B et C - sont indépendantes.

On considère l'ensemble K des matrices $M(a,\ b)$ de la forme

$$M(a,\ b) = \begin{pmatrix} a & -b\\ 3b & a-2b\end{pmatrix} \quad \text{où } (a\ ;\ b) \in \mathbb{R}^2.$$

Partie A

1. **a.** Démontrer que K est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{M}$ des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.
   b. Démontrer que K est un corps commutatif pour l'addition et la multiplication des matrices.
2. Soit f l'application de K dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes définie par

$$M(a,\ b) \longmapsto z - (a-b) + \mathrm{i}b\sqrt{2}.$$

   a. Démontrer que f est un isomorphisme de l'espace vectoriel K sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. En déduire la dimension de K.
   b. Démontrer que f est un isomorphisme du corps K sur le corps $\mathbb{C}$.

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 - \mathrm{i} = 0$.
Utiliser f pour trouver les matrices M de K telles que $M^3 = A'$, où A' est la matrice antécédent de i par f.

Partie B

Une urne contient 3 jetons numérotés 0, 1, -1. Un premier tirage donne un numéro noté a ; on remet le jeton et un second tirage donne un numéro noté b. Les tirages sont équiprobables. On obtient ainsi un couple $(a,\ b)$ et on lui associe la matrice $M(a,\ b)$ de K.
Soit $\overrightarrow{\mathrm{P}}$ un plan vectoriel euclidien rapporté à une base orthonormée $\left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.
On note $\varphi_{a,\ b}$ l'endomorphisme de $\overrightarrow{\mathrm{P}}$ dont la matrice dans $\left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ est $M(a,\ b)$. Quelles sont les probabilités pour que cet endomorphisme soit :

1. Une rotation vectorielle ?
2. Une symétrie vectorielle orthogonale ?

Partie C

Soit P un plan affine euclidien associé au plan vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathrm{P}}$, muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = \left(\mathrm{O}\ ;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$. Soit E le point de coordonnées (0 ; 2) et F le milieu de (O, E). Soit h l'application affine associée à l'endomorphisme $\varphi_{0,\ \frac{1}{4}}$ dont la matrice dans $\left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ est $M\left(0,\ \frac{1}{4}\right)$ et telle que $h(\mathrm{E}) = \mathrm{O}$.

1. Soit s la symétrie orthogonale de P par rapport à la droite affine contenant F et de vecteur directeur $\overrightarrow{\imath}$. Démontrer que $g = h \circ s$ admet comme expression analytique dans $\mathcal{R}$

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & \dfrac{1}{4}y \\ y' & = & \dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{2}y \end{array}\right.$$

2. Soit M_0 le point de coordonnées $\left(x_0\ ;\ y_0\right) = (2\ ;\ 2)$ dans $\mathcal{R}$. On pose :

$$M_1 = g\left(M_0\right), \dots, M_n = g\left(M_{n-1}\right) = g^n\left(M_0\right)$$

pour n élément de $\mathbb{N}^\star$.
On se propose de déterminer la position limite de M_n quand n augmente indéfiniment en cherchant les valeurs limites des suites réelles c et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $\left(x_n\ ;\ y_n\right)$ sont les coordonnées de M_n dans $\mathcal{R}$.

a. Démontrer que la suite définie par $v_n = x_n + y_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, est une suite géométrique.
Est-ce que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, c'est-à-dire est-ce que v_n a une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$?
Exprimer $x_n + y_n$ en fonction de n.

b. Démontrer par récurrence sur n : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n > 0$ et $y_n > 0$.

c. On considère la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \dfrac{x_n}{y_n}$. Démontrer qu'elle vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{3u_n + 2}.$$

Soit $\qquad w_n = \dfrac{u_n - \dfrac{1}{3}}{u_n + 1}$.
Démontrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
Donner l'expression de w_n, puis de u_n en fonction de n. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

d. En utilisant les valeurs de $u_n = \dfrac{x_n}{y_n}$ et $v_n = x_n + y_n$, donner les expressions de x_n et y_n en fonction de n.

En déduire les limites des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(y_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et la position limite des points M_n quand n augmente indéfiniment.