∽ Baccalauréat C Lyon juin 1977 ∽

EXERCICE 1 **5 POINTS**

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = (x+2)\text{e}^{-x}$$

e représentant la base des logarithmes népériens.

1. Étudier f et construire sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé.
2. Calculer l'aire de la partie de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 0 & \leqslant & x & \leqslant & \lambda \\ 0 & \leqslant & y & \leqslant & f(x) \end{array}\right.$$

   où λ est un nombre réel strictement positif.
   Quelle est la limite de cette aire lorsque λtend vers $+\infty$?

EXERCICE 2 **3 POINTS**

Résoudre dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccc} x^2 - y^2 & = & 5\,440 \\ \text{PGCD}(x\,;\,y) & = & 8 \end{array}\right.$$

PROBLÈME **12 POINTS**

Dans un plan affine euclidien orienté P rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{\imath},\,\overrightarrow{\jmath}\right)$ on considère l'application affine f_h laissant invariant le point O et dont l'endomorphisme associé est φ_h de matrice $\begin{pmatrix} h & 0 \\ 1 & h \end{pmatrix}$ dans la base $\left(\overrightarrow{\imath},\,\overrightarrow{\imath}\right)$, h étant un réel donné.

Partie A

1. Si M est un point de P de coordonnées $(x\,;\,y)$ et $M_1 = f_h(M)$ coordonnées $\left(x_1\,;\,y_1\right)$ dans le repère $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{\imath},\,\overrightarrow{\jmath}\right)$, montrer que

$$\left\{\begin{array}{ccc} x & = & hx \\ y & = & x + hy \end{array}\right.$$

   Déterminer les points invariants de f_h.
   L'application f_h est-elle bijective ?
2. On considère l'application f_0 correspondant à $h = 0$ et Δ la droite d'équation $y = x$. Montrer qu'il existe une application g de P dans P telle que $f_0 = g \circ S_\Delta$ où S_Δ est la symétrie orthogonale par rapport à δ et caractériser g.
3. On suppose $h \neq 0$ dans toute la suite du problème.
   Caractériser $f_{-h} \circ f_h$.
   Soit D_1 la droite d'équation $y = -x$ et D la droite d'équation $y = 0$ dans le repère $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{\imath},\,\overrightarrow{\jmath}\right)$.
   Soit S_1 la symétrie orthogonale par rapport à D_1 et S_2 la symétrie orthogonale par rapport à D_2. Déterminer géométriquement la nature de l'application $T = S_2 \circ S_1 \circ f_h \circ f_h$ puis en préciser la caractérisation.

4. Si S_y est la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ et si S_Δ est la symétrie orthogonale par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$, soit :

$$U = f_h \circ S_y \circ f_h \circ S_\Delta.$$

Calculer en fonction des coordonnées $(x\ ;\ y)$ d'un point M, les coordonnées $(X\ ;\ Y)$ de son image $U(M)$. Soit $z = x + \text{i}y$ l'affixe de M et $Z = X + \text{i}Y$ celle de $U(M)$.
Calculer Z en fonction de z. En déduire la nature de U et préciser sa caractérisation.

Partie B

On considère l'application f_1 correspondant à $h = 1$.
On a donc

$$\left\{\begin{array}{l c l} x & = & x\\ y & = & x + y\end{array}\right.$$

1. Soit M un point de P n'appartenant pas à la droite $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$, soit H sa projection orthogonale sur la droite $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ et soit $M_1 = f_1(M)$.
Déterminer les directions des droites HM_1 et MM_1 et en déduire une construction simple de M_1 connaissant M.

2. Soit H la courbe d'équation $x^2 - y^2 = 9$ dans le repère orthonormé $\left(\text{O}\ ;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$. Déterminer la nature de H et construire H.

3. Déterminer l'équation de la courbe H_1 image de H par f_1. Mettre cette équation sous la forme $x = F(y)$ où F est une fonction que l'on déterminera. En déduire les asymptotes de H_1.
Vérifier que ces asymptotes ont pour vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{\imath}$ et $\overrightarrow{\imath} + 2\overrightarrow{\jmath} = \overrightarrow{k}$.
Déterminer l'équation de H_1 dans le repère $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{k}\right)$. Reconnaître la nature de H_1. Construire H_1 sur le même dessin que H.

Partie C

Soit M_0 un point donné de P,

$$M_1 = f_h\left(M_0\right),\quad M_2 = f_h\left(M_1\right),\quad \ldots,\quad M_n = f_h\left(M_{n-1}\right)$$

pour tout entier naturel n. On notera $\left(x_0\ ;\ y_0\right)$ les coordonnées de M_0, $\left(x_1\ ;\ y_1\right)$ celles de $M_1, \ldots, \left(x_n\ ;\ y_n\right)$ celles de M_n.

1. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a

$$\left\{\begin{array}{l c l} x_n & = & h^n x_0\\ y_n & = & nh^{n-1}x_0 + h^n y_0\end{array}\right.$$

Montrer que si $x_0 > 0$, $h > 0$ et $h \neq 1$, on a :

$$y_n = x_n(\alpha \text{Log}\, x_n + \beta)$$

où α et β sont des constantes indépendantes de n que l'on calculera en fonction de h, x_0 et y_0 (Log x_n représente le logarithme népérien de x_n).

2. On suppose $x_0 > 0$, $h > 0$ et $h \neq 1$. Que faut-il imposer de plus à h pour que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente ? Dans ces conditions trouver la limite de cette suite et montrer que la suite $\left(y_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est également convergente et trouver sa limite.