∽ Baccalauréat C Lyon juin 1978 ∾

EXERCICE 1 **3 POINTS**

1. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation

$$13x - 84y = 7$$

2. Déterminer les solutions $(x\,;\,y)$ de cette équation telles que x et y soient premiers entre eux (on pourra montrer que si $(x\,;\,y)$ est une solution de l'équation le PGCD de x et y est 1 ou 7).

EXERCICE 2 **5 POINTS**

Dans un plan affine euclidien P on considère trois points A, B et C tels que $\left(\mathrm{A},\ \overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$ soit un repère orthonormé direct.
Soit t un nombre réel quelconque; on désigne par I_t le barycentre des points A, B, C affectés respectivement des coefficients $2t^2 - t,\ t,\ 1 - t^2$.
L'objet de cet exercice est de déterminer l'ensemble E des barycentres I_t lorsque t décrit $\mathbb{R}$.
On désigne par f l'affinité orthogonale de rapport 2 et dont l'axe contient les points A et C.

1. Montrer que l'image $f(\mathrm{E})$ de l'ensemble E par l'application f est inclus dans un cercle (Γ) de centre A dont on précisera le rayon.
2. Soit D le point symétrique du point C par rapport à A. On désigne par (Γ) {D} l'ensemble des points du cercle (Γ) qui sont distincts du point D; montrer que l'on a $f(E) = (\Gamma) - \{\mathrm{D}\}$.
3. En déduire la nature de l'ensemble E et le représenter graphiquement (on prendra 8 cm pour unité de longueur).

   On rappelle que l'affinité orthogonale d'axe D et de rapport $k \in \mathbb{R}$ est la transformation qui associe à chaque point M du plan, le point M' tel que
   $\overrightarrow{HM'} = k\overrightarrow{HM}$ où H désigne l'image de M par la projection orthogonale sur la droite D.

PROBLÈME **11 POINTS**

Pour tout nombre réel $\lambda \neq 0$ on désigne par f_λ la fonction de l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes dans lui-même qui associe à tout nombre complexe z le nombre complexe $Z = f_\lambda(z)$ satisfaisant à l'équation :

$$Z - \mathrm{i}\lambda = \frac{\mathrm{i}}{\lambda}(z - \mathrm{i}\lambda).$$

Dans un plan affine euclidien orienté P rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ on note F_λ l'application affine qui associe à tout point m d'affixe z le point M d'affixe $Z = f_\lambda(z)$.

Partie A

1. **a.** Montrer que F_λ est une bijection et déterminer l'application réciproque F_λ^{-1}.

   b. Montrer que F_λ admet un unique point invariant S_λ. Calculer ses coordonnées.

2. **a.** Pour $m \neq S_\lambda$, exprimer en fonction de λ le rapport $\dfrac{S_\lambda M}{S_\lambda m}$, ainsi que la mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{S_\lambda m}, \overrightarrow{S_\lambda M}}\right)$.

b. En déduire la nature de l'application F_λ et préciser ses éléments caractéristiques. Pour quelle valeur de λ l'application F_λ est-elle une rotation ?

Partie B

1. Pour tout point m de coordonnées $(x\,;\,y)$ on note par $(X\,;\,Y)$ les coordonnées du point $M = F_\lambda(m)$.

a. Calculer X et Y en fonction de x et y.

b. Soit A le point de P de coordonnées $(1\,;\,1)$; donner une équation de l'ensemble des points de la forme $F_\lambda(\text{A})$ lorsque λ décrit $\mathbb{R}$.

2. a. Étudier la fonction numérique

$$x \longmapsto 1 - x + \frac{1}{1-x}.$$

et construire sa courbe représentative (Γ) dans le repère donné. Préciser ses asymptotes et son centre de symétrie Ω.

b. Soit a un nombre réel, $a \geqslant 2$; calculer l'aire arithmétique de la partie du plan limitée par la courbe (Γ), son asymptote oblique et les droites d'équation $x = 2$ et $x = a$. Quelle est la limite de cette aire lorsque a tend vers $+\infty$?

c. Établir une équation de la courbe (Γ) dans un repère $\left(\Omega,\ \overrightarrow{I},\ \overrightarrow{J}\right)$, $\overrightarrow{I}$ et $\overrightarrow{J}$ étant des vecteurs convenablement choisis dirigeant respectivement chacune des deux asymptotes de (Γ).

En déduire la nature de la courbe (Γ).

Partie C

1. Soit φ l'application qui à tout nombre réel $\lambda \neq 0$ associe le point $F_\lambda(\text{A})$ de P. Montrer que φ est une bijection de $\mathbb{R}^\star$ sur (Γ).

2. Pour tout couple $(\lambda_1\,;\,\lambda_2)$ de nombres réels non nuls on désigne par

$M_1 = \varphi(\lambda_1)$, $M_2 = \varphi(\lambda_2)$ leurs images respectives et par $M_1 \star M_2 = \varphi(\lambda_1\lambda_2)$ l'image par φ du produit $\lambda_1\lambda_2$.

Montrer que $(\Gamma, \star)$ est un groupe commutatif.

On notera E son élément neutre.

3. Dans cette question, on note par M_3 le point $M_1 \star M_2$.

a. On suppose les points M_1 et M_2 distincts.

Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{\text{E}M_3}$ et $\overrightarrow{M_1M_2}$ sont colinéaires.

b. On suppose les points M_1 et M_2 confondus. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{\text{E}M_3}$,lorsqu'il n'est pas nul, dirige la tangente à Γ au point M_1.

c. En déduire une construction géométrique de M_3 à partir de M_1 et M_2. On justifiera à l'aide d'une équation de (Γ) que l'intersection de la courbe (Γ) avec une droite quelconque Δ se compose de deux points au plus.