Durée : 4 heures

Baccalauréat C juin 1982 Lyon

EXERCICE 1 **4 points**

1. **a.** Déterminer les racines carrées du nombre complexe $3+4\text{i}$.

   b. Résoudre dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation

$$z^3-(5+3\text{i})z^2+(5+8\text{i})z-1-5\text{i}=0$$

   dont on remarquera qu'elle admet une racine z_1 réelle.

   On notera $z_2=x_2+\text{i}y_2$, $z_3=x_3+\text{i}y_3$ $\quad(x_2<x_3)$ les deux autres solutions.

2. On considère dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé les points M_1, M_2, M_3 d'affixes respectives z_1, z_2, z_3.

   Calculer le rapport et donner une mesure en radian de l'angle de la similitude plane directe de centre M_1 transformant M_2 en M_3.

EXERCICE 2 **4 points**

Pour tout naturel $n\geqslant 1$ on pose

$$I_n=\frac{1}{2^{n+1}n!}\int_0^1(1-t)^n\text{e}^{\frac{t}{2}}\,\text{d}t.$$

1. À l'aide d'une intégration par parties calculer I_1.
2. Démontrer que pour tout naturel $n\geqslant 1$ on a

$$I_{n+1}=I_n-\frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}.$$

3. En déduire par récurrence que pour tout naturel $n\geqslant 1$ on a

$$\sqrt{\text{e}}=1+\frac{1}{2}\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{2^n}\frac{1}{n!}+I_n.$$

4. Montrer que l'on peut trouver une constante A telle que

$$0\leqslant I_n\leqslant\frac{1}{2^n n!}A.$$

   On pourra déterminer A en majorant la fonction $t\longmapsto(1-t)^n\text{e}^{\frac{t}{2}}$ sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

   En déduire la limite quand n tend vers l'infini de

$$u_n=1+\frac{1}{2}\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{2^n}\frac{1}{n!}.$$

PROBLÈME **12 points**

$\mathscr{P}$ est un plan vectoriel euclidien et $\left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ une base orthonormée de ce plan, a est un réel et b un réel non nul. On note $\varphi_{a,\,b}$ l'endomorphisme de $\mathscr{P}$ dont la matrice dans la base $\left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ est $\begin{pmatrix}a & b^2\\ 1 & a\end{pmatrix}$.

Partie A

1. Pour quelles valeurs de a et b, $\varphi_{a,\,b}$ est-il bijectif? Déterminer, suivant les valeurs de a et de b, le noyau et l'image de $\varphi_{a,\,b}$.
2. Dans cette question $a = b$.

   On appelle h l'homothétie vectorielle de $\mathscr{P}$ de rapport $\dfrac{1}{2b}$. Démontrer que l'application $p = \varphi_{a,\,b} \circ h$ est une projection vectorielle dont on précisera les ensembles qui la caractérisent.

   En déduire que $\varphi_{a,\,b}$ est égal à la composée d'une homothétie vectorielle, dont on donnera le rapport, et d'une projection vectorielle.
3. Dans cette question $a = 0$ (et b est toujours un réel non nul).

   Pour quelles valeurs du réel λ le système d'équations

   $$\left\{\begin{array}{lcl} \lambda x - b^2 y & = & 0 \\ x - \lambda y & = & 0 \end{array}\right.$$

   d'inconnue le couple $(x~;~y)$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, admet-il d'autres solutions que le couple $(0~;~0)$?

   Pour chaque valeur de λ trouvée, déterminer l'ensemble des solutions de ce système.

   En déduire qu'il existe deux droites vectorielles $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ dont on donnera des équations cartésiennes, globalement invariantes par $\varphi_{a,\,b}$. À quelle condition ces droites sont-elles orthogonales ?

Partie B

Soit P le plan affine euclidien associé au plan vectoriel $\mathscr{P}$ rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. Dans la suite du problème, toutes les constructions demandées se feront dans un même repère orthonormé, en prenant 2 cm pour unité de longueur sur les axes.

On appelle f l'application affine de P qui au point M de coordonnées $(x~;~y)$ dans $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ associe le point M' de coordonnées $(x'~;~y')$ telles que

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & b^2 y \\ y' & = & x + \text{Log}\, b^2 \end{array}\right.$$

(où Log est le symbole du logarithme népérien).

1. Quelle est la matrice, relativement à $\left(\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, de l'endomorphisme associé à f ? Montrer que f est bijective et déterminer analytiquement sa réciproque f^{-1}.
2. Déterminer, suivant les valeurs de b, l'ensemble des points invariants par f. Dans le cas où $b^2 = 1$, reconnaître f.
3. Quelles sont les droites affines D de P transformées en droites f(D) parallèles à D ?
4. Construire les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ d'équations respectives $y = \text{e}^x$ et $y = \text{Log}\, x$. Démontrer que la courbe $\mathscr{C}'$ est la transformée de la courbe $\mathscr{C}$ par f.

   Soit Δ la tangente à $\mathscr{C}$ en un point M_0 d'abscisse x_0.

   Démontrer que la tangente à $\mathscr{C}'$ au point $M'_0 = f\left(M_0\right)$ est la droite $\Delta' = f(\Delta)$.

Partie C

Soit t un réel. Un point mobile M a pour coordonnées dans $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, à l'instant t,

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos t \\ y(t) & = & \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin t. \end{array}\right.$$

1. Construire la trajectoire Γ de M. Quelle est la nature du mouvement de M ?
2. A quels instants le point M coïncide-t-il avec le point A de coordonnées $(0\,;\,1)$. Démontrer que les courbes $\mathscr{C}$ et Γ admettent en A la même tangente T.
3. Déterminer la nature de la trajectoire Γ' du point $M' = f(M)$.
   Dans le cas où $b^2 = 2$ construire Γ', placer les points A, $\text{A}' = f(\text{A})$, $\text{O}' = f(\text{O})$ et la droite

$$T' = f(T).$$