Durée : 4 heures

Baccalauréat C Lyon septembre 1969

EXERCICE 1

Résoudre, dans le corps des complexes, l'équation

$$z^4 + z^2 + 1 = 0,$$

où z est l'inconnue.

EXERCICE 2

On donne la fonction f de la variable réelle x définie par

$$\left\{\begin{array}{lll} x & \longmapsto & f(x) = x^2\left(\operatorname{Log} 2x - \dfrac{4}{3}\right) \text{ pour } x \text{ positif,}\\ x & \longmapsto & f(x) = 0 \text{ pour } x \text{ nul,}\end{array}\right.$$

le symbole Log désignant le logarithme népérien.
Étudier les variations de cette fonction et construire son graphe dans un repère orthonormé.
(Lorsque x tend vers zéro, on pourra poser $2x = \dfrac{1}{u}$.)

PROBLÈME

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé, on considère la transformation ponctuelle, $\mathcal{T}$, dans laquelle un point M de coordonnées $(x~;~y)$ a pour image le point M' dont les coordonnées $(x'~;~y')$ sont définies par

$$x' = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad y' = \frac{y}{x^2}$$

Partie A

1. Préciser l'ensemble, E, de définition de $\mathcal{T}$.
2. Rechercher les points doubles éventuels de $\mathcal{T}$.
3. Démontrer que $\mathcal{T}$ est bijective sur E. Étudier si, en outre, $\mathcal{T}$ est involutive.

Partie B

(Δ_1) est la droite d'équation $x+1 = 0$; elle coupe $x'\text{O}x$ en A ; (Δ_2) est la droite d'équation $x - 1 = 0$; elle coupe $x'\text{O}x$ en B.
Démontrer que le point M' est conjugué harmonique du point M par rapport aux points d'intersection de la droite OM et des droites (Δ_1) et (Δ_2).

Partie C

Soit une droite (D). Déterminer l'ensemble image par $\mathcal{T}$ de $(D) \cap$ E :

1. lorsque (D) est parallèle à $y'\text{O}y$;
2. lorsque (D) est parallèle à $x'\text{O}x$;
3. lorsque (D) passe par l'origine ;
4. lorsque (D) n'est ni une parallèle à l'un des axes, ni une droite passant par l'origine.

Partie D

Dans cette partie, et jusqu'à la fin du problème, le point M sera un élément de la droite (D_0) d'équation

$$3x - 4y + 2 = 0.$$

1. Construire l'image de $(D_0) \cap$ E par $\mathscr{T}$.

2. Démontrer que les polaires, par rapport au cercle (C) de diamètre AB, associées aux points M de (D_0), passent par un point fixe, I.

3. Démontrer que les cercles de diamètre IM sont orthogonaux à un cercle fixe. En déduire qu'ils forment un faisceau, $\mathscr{F}$, dont on déterminera la nature.

4. K est le point d'intersection de (D_0) et de OI.
On considère l'inversion, $\mathscr{J}$, de pôle I et de puissance $\lambda = \text{IK}^2$.

   a. Trouver l'ensemble, (Γ), des points doubles de $\mathscr{J}$.

   b. Déterminer l'image du faisceau $\mathscr{F}$ par $\mathscr{J}$.

   c. Déterminer l'image du cercle (C) par $\mathscr{J}$.