

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Lyon septembre 1971 ∞

EXERCICE 1

Soit f la fonction numérique à variable réelle définie par

$$x \mapsto f(x) = x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}.$$

1. Étudier les variations de cette fonction. Construire le graphe (C) dans un repère orthonormé.
2. Déterminer l'aire $S(m)$ du domaine limité par la courbe (C) et les trois droites d'équations respectives

$$y = x, \quad x = 1, \quad x = m,$$

m étant un réel strictement positif.

3. Quelle est la limite de $S(m)$ quand $m \rightarrow +\infty$?

EXERCICE 2

1. a étant un entier naturel, montrer que $a^5 - a$ est divisible par 10.
2. Montrer que, si $a^5 - b^5$ est divisible par 10, $a^2 - b^2$ est divisible par 20 (a et b sont des entiers naturels, tels que $a \geq b$).
3. Déterminer les entiers a et b satisfaisant à l'hypothèse de la deuxième question et à l'égalité

$$a^2 - b^2 = 720.$$

PROBLÈME

Partie A

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé d'origine O . Soit a un réel strictement positif et k un réel non nul.

1. Étudier suivant les valeurs du réel m la nature de la courbe (L_m) d'équation

$$y^2 = (m-1)x^2 + \frac{k}{2a}x.$$

2. On note (P^*) l'ensemble (P) privé du point O .

Soit J la transformation ponctuelle définie sur (P^*) qui au point M d'affixe z associe le point M_1 d'affixe z_1 tel que $z_1 \bar{z} = k$.

Démontrer que O , M et M_1 sont alignés. Calculer $OM \cdot OM_1$ et en déduire la nature de la transformation J .

3. Soit (Γ_m) la courbe transformée de $(L_m) \cap (P^*)$ par la transformation J .
Montrer que les coordonnées $(X_1 ; Y_1)$ d'un point M_1 de (Γ_m) vérifient la relation

$$y_1^2 = (m-1)x_1^2 + \frac{x_1}{2a}(x_1^2 + y_1^2)$$

Réciproquement, montrer que les points de (P^*) dont les coordonnées vérifient la relation ci-dessus appartiennent à (Γ_m) .

Étudier le cas où $m = 0$.

Partie B

Le paramètre a étant comme ci-dessus un réel strictement positif, on désigne par (D) la droite d'équation $x = 2a$.

On note (E) l'ensemble (P) privé des deux droites $x = 0$ et $x = 2a$

$$(E) = (P) - (y'y) \cup (D).$$

A tout point N de (E) on associe le point N' , tel que $\overrightarrow{ON'} = \overrightarrow{NQ}$, Q étant le point d'intersection de (D) avec ON .

On définit ainsi une transformation T de (E) dans (P^*) , qui à N fait correspondre le point $N' = T(N)$.

1. Cette transformation T est-elle involutive? Quel est l'ensemble des points doubles de T ?
2. Déterminer les coordonnées $(x' ; y')$ de $N' = T(N)$ en fonction des coordonnées $(x ; y)$ de N .
3.
 - a. Soit (C_m) le transformé par T de la courbe (Γ_m) pour $m \neq 0$. Montrer que $(C_m) = (C'_m) \cap E$, où (C'_m) est un cercle, dont on déterminera l'équation.
 - b. Quand m parcourt le corps des réels privé de 0, décrire l'ensemble des cercles (C'_m) .
Quel est l'ensemble des transformés des courbes (L_m) par $J \circ T \circ J$?

N. B. – Si z est un nombre complexe, \bar{z} désigne le nombre complexe conjugué.