# Baccalauréat C Lyon septembre 1972

**EXERCICE 1**

**1.** Soit, dans l'ensemble $\mathbb{C}$, des nombres complexes, l'équation $z^3 - \text{i} = 0$.
Trouver le module et l'argument de chaque racine.
L'une des racines est un nombre imaginaire pur, trouver la somme et le produit des deux autres racines.

**2.** Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation

$$z^3 - \text{i} = 6(z + \text{i}).$$

**EXERCICE 2**

Étant donné quatre points A, B, C et D dans l'espace affine euclidien $(\mathscr{E})$ de dimension 3, déterminer l'ensemble $(E)$ des points $M$ de $(\mathscr{E})$ tels que

$$\left\| \overrightarrow{M\text{A}} - 2\overrightarrow{M\text{B}} \right\| = \left\| \overrightarrow{M\text{C}} - 2\overrightarrow{M\text{D}} \right\|.$$

On devra distinguer un cas exceptionnel, pour lequel $(E) = (\mathscr{E})$. Quelle relation nécessaire et suffisante y a-t-il dans ce cas entre les vecteurs $\overrightarrow{\text{AC}}$ et $\overrightarrow{\text{BD}}$ ?

**PROBLÈME**

Soit $r$ un nombre rationnel fixé arbitrairement ($r \in \mathbb{Q}$). On considère les deux fonctions $f$ et $g$ qui, à tout nombre réel $x \geqslant 0$, font correspondre, quand c'est possible, les nombres

$$f(x) = \frac{x + x^r}{2} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x - x^r}{2}$$

Soit (P) un plan affine euclidien et $\left(\text{P}^\star\right)$ l'espace vectoriel associé. On rapporte le plan (P) à un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, où O est le point origine et $\vec{\imath},~\vec{\jmath}$ les deux vecteurs de base de $\left(\text{P}^\star\right)$.

**Partie A**

Soit $(\Gamma_r)$ et $\left(\Gamma'_r\right)$ les courbes qui représentent respectivement $f$ et $g$ dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

**1.** Indiquer, suivant les valeurs de $r$, quel est le domaine de définition des fonctions $f$ et $g$. Préciser et tracer $(\Gamma_r)$ et $\left(\Gamma'_r\right)$ dans les cas particuliers $r = 0$ et $r = 1$.
Sauf dans ces deux cas, pour quelles valeurs de $r$ la fonction $f$ est-elle monotone sur son domaine de définition ? Même question pour $g$.
Déterminer les tangentes à $(\Gamma_r)$ et $\left(\Gamma'_r\right)$ au point O, quand ces courbes passent par O (sauf le cas $r = 1$ déjà étudié).
Démontrer que, pour $r < 0$, il y a une droite qui passe par O et qui est asymptote à $(\Gamma_r)$ et à $\left(\Gamma'_r\right)$.

**2.** On appelle $M$ et $M'$ les points respectifs de $(\Gamma_r)$ et $\left(\Gamma'_r\right)$ qui ont une même abscisse $x$. Quel est l'ensemble des milieux des segments de droite $(MM')$ ?
En déduire une transformation involutive du plan (P), pour laquelle $(\Gamma_r)$ et $\left(\Gamma'_r\right)$ sont homologues.
Tracer (de façon succincte et si possible de couleurs différentes) les courbes $(\Gamma_r)$ et $\left(\Gamma'_r\right)$ pour

$$r \in \left\{-\frac{1}{2}~;~\frac{1}{2}~;~2\right\}$$

**Partie B**

Pour une valeur donnée de $r$ et pour chaque nombre $u > 0$, on désigne par $L_u$ l'application linéaire de $\left(\mathrm{P}^\star\right)$ vers $\left(\mathrm{P}^\star\right)$ qui a pour matrice

$$\begin{pmatrix} f(u) & g(u)\\ g(u) & f(u)\end{pmatrix} \quad \text{relativement à la base } \left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right).$$

Soit $(H)$ l'ensemble des applications $L_u$ correspondant à tous les nombres $u > 0$ (pour une même valeur de $r$). Pour $v > 0$ et $u > 0$, on désigne par $L_u \circ L_v$ l'application composée obtenue en effectuant l'application $L_v$ suivie de $L_u$.

**1.** Démontrer que $L_u \circ L_v = L_{uv}$. Y a-t-il dans $(H)$ un élément neutre pour cette loi de composition $\circ$ ? Cette loi est-elle commutative dans $(H)$ ?

Pour chaque valeur $u > 0$, l'application $L_u$ est-elle bijective ? Si oui, déterminer son application réciproque, $L_u^{-1}$, et la matrice de cette application linéaire $L_u^{-1}$ relativement à la base $\left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.

A-t-on $L_u^{-1} \in (H)$ ?

Quelle conclusion peut-on tirer de ces propriétés ?

**2.** Déterminer tous les vecteurs $\overrightarrow{v} \in \left(\mathrm{P}^\star\right)$ tels que l'image $L_u\left(\overrightarrow{v}\right)$ appartienne à la même droite vectorielle que $\overrightarrow{v}$ (on devra distinguer le cas exceptionnel $u = 1$ ou $r = 1$).

En déduire qu'il existe toujours deux droites vectorielles $(D_1)$ et $(D_2)$ qui sont globalement invariantes par $L_u$ et qui sont orthogonales entre elles ; on appellera $(D_1)$ celle qui a une pente négative.

Soit deux vecteurs arbitraires non nuls $\overrightarrow{e_1} \in (D_1)$ et $\overrightarrow{e_2} \in (D_2)$ ; déterminer leurs images $L_u\left(\overrightarrow{e_1}\right)$ et $L_u\left(\overrightarrow{e_2}\right)$. En déduire la matrice de $L_u$ dans la base $\left(\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2}\right)$, en fonction de $u$ et de $r$.

**3.** On choisira maintenant $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ de façon qu'ils soient unitaires et que leurs composantes relatives à $\overrightarrow{\imath}$ dans la base $\left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ soient positives.

Soit A le point du plan (P) ayant pour coordonnées $(1\,;1)$ dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2}\right)$.

Sachant que la matrice de $L_u$ relativement à cette base $\left(\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2}\right)$ est $\begin{pmatrix} u^r & 0\\ 0 & u\end{pmatrix}$, préciser l'ensemble $(E)$ des points $M$ de (P), tels que $\mathrm{O}M = L_u(\mathrm{OA})$, obtenus lorsque $u$ décrit l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$. Tracer $(E)$ dans les cas $r = \dfrac{1}{2}$ et $r = -\dfrac{1}{2}$.