Baccalauréat C Lyon septembre 1973

EXERCICE 1

Soit le nombre complexe $z = \cos\theta + \text{i}\sin\theta,\ z \neq 1$.

1. Calculer $Z = \dfrac{1+z}{1-z}$ en fonction de $\text{tg}\,\dfrac{\theta}{2}$.
2. Déterminer z pour que $z^3 + \dfrac{1}{z^3} = 1$.
   En déduire les valeurs correspondantes de Z.

EXERCICE 2

Soit x élément de $\mathbb{R}$, on considère la fonction numérique f définie par

$$f :\ x \longmapsto f(x) = x\text{Log}\,\frac{1}{x} - \frac{1}{2}x$$

(dans laquelle le symbole Log représente le logarithme népérien).

1. Étudier les variations et construire la représentation graphique de f dans un repère orthonormé.
2. Déterminer une primitive de f.
3. Déterminer l'aire $A(u)$ du domaine (Δ), ensemble des points M de coordonnées $(x~;~y)$, tels que

   $$u \leqslant x \leqslant \frac{1}{\sqrt{\text{e}}},\quad 0 \leqslant y \leqslant f(x),$$

   où e désigné la base des logarithmes népériens et u un réel tel que

   $$0 < u < \frac{1}{\sqrt{\text{e}}}.$$

   Cette aire $A(u)$ admet-elle une limite lorsque l'on fait tendre u vers 0^+ ?

EXERCICE 3

Soit V un plan vectoriel euclidien rapporté à une base orthonormée $\mathcal{B} = \left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
On considère deux endomorphismes φ et ψ de V dont les matrices respectives A et B dans la base $\mathcal{B}$ sont

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

E représente un plan affine euclidien associé à V.

1. **a.** Montrer que φ est un endomorphisme involutif et déterminer la droite vectorielle D des vecteurs invariants par φ.

   b. Montrer que la droite vectorielle D est globalement, invariante par l'endomorphisme $\psi \circ \varphi$.

c. Démontrer que la droite vectorielle $\overrightarrow{\Delta}$ orthogonale à D est elle aussi invariante par $\psi \circ \varphi$.

d. Déterminer dans la base $\mathscr{B}$ la matrice de $\psi \circ \varphi$.
$\psi \circ \varphi$ est-il un automorphisme de V?

2. Soit $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath}\right)$ un repère cartésien du plan affine E et h l'application affine de E dans E définie par l'endomorphisme $\psi \circ \varphi$ et le couple de points (O, O′) 0′ = h(O) étant le point de coordonnées (−5 ; 14) dans le repère $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath}\right)$.

a. Par h, un point M$(x~;~y)$ de E a pour image M′ = h(M) de coordonnées $\left(x'~;~y'\right)$; démontrer que

$$x' = 3x + 4y - 5, \quad y' = 4x - 3y + 14.$$

Montrer que h est une transformation.affine et donner l'expression analytique dans le repère $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath}\right)$ de la transformation réciproque h^{-1}.

b. Déterminer l'ensemble des points invariants par h.

3. On considère dans le plan complexe la transformation T dans laquelle le point M d'affixe z a pour image M′ = T(M) dont l'affixe z' est telle que

$$z' = (3 + 4\text{i}\overline{z} - 5 + 14\text{i}.$$

($\overline{z}$ désigne le nombre complexe conjugué de z).
Reconnaître la nature géométrique de la transformation T.
Déterminer le point invariant de T et les droites invariantes par T.
Montrer que T est la composée, dans un ordre arbitraire, de deux transformations affines simples que l'on peut associer aux endomorphismes φ et ψ de la question **1.**

4. Soit M un point n'appartenant pas à l'ensemble des droites invariantes par T. On note
$\text{M}_1 = \text{T(M)}$; $\text{M}_2 = \text{T}(\text{M}_1) = \text{T} \circ \text{T(M)} = \ldots$
$\text{M}_n = \underbrace{\text{T} \circ \text{T} \circ \ldots \circ \text{T(M)}}_{n\text{ fois}}.$
Démontrer que pour tout point M de E vérifiant la condition imposée au début de cette question, les points M_n appartiennent, quel que soit le naturel n, à la réunion de deux droites.
Déterminer ces droites par leurs équations pour le point $\text{M}_0(2~;~1)$.