Durée : 4 heures

Baccalauréat C septembre 1975 Lyon

EXERCICE 1

On considère l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcll} f(x) & = & x|\text{Log}\, x| & \text{pour } x > 0\\ f(0) & = & 0 & \end{array}\right.$$

1. Étudier les variations de la fonction f.
2. Le plan affine euclidien est rapporté à un repère orthonormé, l'unité est représentée par 1 cm. Construire la courbe représentative de f ; calculer l'aire de la portion de plan, ensemble des points $M(x~;~y)$ tels que

$$x \in [1~;~\text{e}] \quad \text{et} \quad y \in [0~;~f(x)]$$

EXERCICE 2

Quel est, suivant la valeur de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne du nombre 5^n par 13 ?
En déduire que, quel que soit l'entier naturel n non nul, on a :

$$18^{4n+1} - 44^{4n-1} - 3 \times 96^{4n+2} = 0 \quad (13)$$

PROBLÈME

Soit P un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ d'orientation positive,

Partie A

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des courbes Γ_α d'équation

$$\left(\alpha^2 - 4\right)x^2 - 4y^2 - 4\left(\alpha^2 - 4\right) = 0$$

α appartenant à $\mathbb{R}$.

1. Comparer Γ_α et $\Gamma_{-\alpha}$.
2. Étudier suivant les valeurs de α la nature de Γ_α et en préciser chaque fois les éléments fondamentaux (centre, sommets, foyers et asymptotes s'il y a lieu).
3. Dessiner les courbes Γ_0 et $\Gamma_{2\sqrt{2}}$ (sur une même figure).

Partie B

On appellera C_α la courbe représentée paramétriquement par les équations

$$\left\{\begin{array}{lcll} x & = & 2\sqrt{2}\cos t & (2)\\ y & = & \alpha + 2\sqrt{2}\sin t & (3) \end{array}\right. \qquad t \in \mathbb{R}$$

α étant un réel donné.

1. **a.** Montrer que C_α est un cercle, en donner une équation cartésienne, et en préciser le centre et le rayon.

   b. Dessiner C_0 sur la figure du A - 3.

2. Quand α décrit $\mathbb{R}$, C_α décrit un ensemble de cercles que l'on désignera par F.

   a. Les ensembles $\mathscr{E}$ et F ont-ils un élément commun ?

   b. Comparer C_α et $C_{-\alpha}$.

   c. Étudier l'intersection $\Gamma_\alpha \cap C_\alpha$ et montrer que, lorsque cette intersection n'est pas vide, Γ_α et C_α admettent la même tangente en tout point qui leur est commun.

   d. Tracer, sur trois figures distinctes, les trois ensembles pour les trois valeurs particulières suivantes de α :

$$\alpha = \sqrt{2}, \quad \alpha = 2\sqrt{2}, \quad \alpha = 1.$$

Partie C

Dans cette dernière partie α est une constante réelle positive $\left(\alpha \in \mathbb{R}^+\right)$, M un point variable du cercle associé C_α.

1. On considère alors les cercles C_α et $C_{-\alpha}$ de centres respectifs I et P.
   Démontrer qu'il existe une rotation unique d'angle droit direct transformant C_α en $C_{-\alpha}$. Déterminer par ses coordonnées le centre de cette rotation, noté F.

2. À chaque point M de C_α on fait correspondre le point M', variable sur $C_{-\alpha}$ défini par $\left(\overrightarrow{\mathrm{I}M}, \overrightarrow{\mathrm{I}'M'}\right) = \left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\imath}\right)$; soit P le milieu du segment $[MM']$.
   Montrer que la médiatrice de $[MM']$ passe par un point fixe que l'on précisera.

3. Le plan $\mathscr{P}$ rapporté au repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ étant maintenant regardé comme plan de représentation des nombres complexes, on appelle z l'affixe de M, z' celle de M', Z celle de P.
   Montrer que $z' = \mathrm{i}z + \alpha(1 - \mathrm{i})$.
   Calculer Z en fonction de z. Cette relation entre Z et z définit une application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui à chaque point M de C_α associe le point P correspondant ; reconnaître la nature de cette application et en déduire l'ensemble des points P obtenu quand M décrit C_α.

N. B. - La partie C est indépendante des résultats des c. et d. de la partie B.