Durée : 4 heures

Baccalauréat C Lyon septembre 1975

EXERCICE 1

1. Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation : $x^2 - y^2 = 1$.
2. Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation : $x^2 - y^2 = P$ où P est un naturel premier.

EXERCICE 2

Soit P le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. Déterminer l'ensemble des points M de P dont l'affixe z est telle que :

$$z^3 + z^2 + z + 1 \quad \text{appartient à } \mathbb{R}.$$

Représenter cet ensemble.

PROBLÈME

V est un espace vectoriel réel de dimension 2, muni d'une base $\mathscr{B} = \left(\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. E est un espace affine admettant V pour espace vectoriel associé et muni d'un repère cartésien $\mathscr{R} = \left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

Partie A

Pour tout couple de réels $(a~;~b)$ on définit un endomorphisme de V noté $\varphi_{(a~;~b)}$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est

$$M_{(a~;~b)} = \begin{pmatrix} 1+a & 1 \\ ab & 1+b \end{pmatrix}$$

On appelle Δ_1 (respectivement Δ_2) la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{\imath} - a\vec{\jmath}$ $\left(\text{respectivement } \vec{\imath} - a\vec{\jmath}\right)$.

1. Vérifier que Δ_1 et Δ_2 sont distinctes si et seulement si : $a + b \neq 0$.
2. À quelle condition $\varphi_{(a~;~b)}$ est-il bijectif ? Dans le cas où il ne l'est pas, déterminer son noyau et son image.
3. Calculer la matrice dans la base $\mathscr{B}$ de l'endomorphisme $\varphi_{(a~;~b)} \circ \varphi_{(a~;~b)}$.
   Existe-t-i1 des endomorphismes $\varphi_{(a~;~b)}$ involutifs ?
4. λ étant un réel, on appelle V_λ l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ de V tels que
   $\varphi_{(a~;~b)}\left(\vec{u}\right) = \lambda\vec{u}$.
   Montrer que pour deux valeurs du réel λ (λ_1 et λ_2), distinctes ou confondues, V_λ contient des vecteurs non nuls. Déterminer V_{λ_1} et V_{λ_2}.
5. On suppose : $a+b+2 = 0$. Montrer que $\varphi_{(a~;~b)}$ est alors la symétrie vectorielle par rapport à Δ_1 suivant Δ_2.
6. On suppose : $a+b+1 = 0$. Montrer que $\varphi_{(a~;~b)}$ est alors la projection vectorielle sur Δ_1 suivant Δ_2.

Partie B

Pour tout couple de réels $(a\ ;\ b)$ on considère l'application affine $f_{(a\ ;\ b)}$ de E vers E dont l'endomorphisme associé est $\varphi_{(a\ ;\ b)}$ et qui laisse invariant le point O.

1. Reconnaître l'application $f_{(a\ ;\ b)}$ dans le cas où : $a+b+2=0$ puis dans le cas où : $a+b+1=0$.
2. V est un espace euclidien et le repère $\mathcal{R}$ est orthonormé. On suppose $a = t$ et $b = \text{e}^t$, t étant un réel quelconque, e étant la base des logarithmes népériens. I est le point de coordonnées $(1\ ;\ -1)$. On note M l'image à l'instant t du point I par l'application $f_{(t\ ;\ \text{e}^t)}$.

   Déterminer les coordonnées $(x\ ;\ y)$ du point mobile M en fonction du temps t. Montrer que la trajectoire de M est la courbe d'équation $y = x\text{e}^x - \text{e}^x - 1$.

   Construire cette trajectoire. Déterminer le vecteur-vitesse et le vecteur-accélération de M à l'instant t et déterminer les instants où le mouvement de M est accéléré ou retardé.

N. B. : La partie B 2. est indépendante des résultats de la partie A.