

∞ Baccalauréat C Lyon septembre 1976 ∞

EXERCICE 1

Le plan affine euclidien est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On appelle affixe du point M le couple de coordonnées $(x; y)$ le nombre complexe z égal à $x + iy$.

T désigne l'application du plan dans lui-même qui au point M d'affixe z associe le point $T(M)$ d'affixe z^3 .

1. Calculer les coordonnées de $T(M)$ en fonction de x et de y .
2. Démontrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que M et $T(M)$ aient même abscisse est que M appartienne à (O, \vec{v}) ou à une hyperbole (H) d'axe transverse (O, \vec{u}) . Préciser les sommets et les asymptotes de cette conique et la représenter dans le plan.
Démontrer que tout point M appartenant à l'une des asymptotes de H est tel que $T(M)$ appartient à (O, \vec{v}) .

EXERCICE 2

Dans le plan affine euclidien orienté P rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$ on considère :

- la rotation \mathcal{R}_1 de centre $A_1(0; 2)$ et dont l'angle a pour mesure $+\frac{\pi}{2}$ en radians.
- la rotation \mathcal{R}_2 de centre $A_2(-2; 0)$ et dont l'angle a pour mesure $-\frac{\pi}{2}$ en radians.
- la symétrie orthogonale S par rapport à la droite A_1A_2 .

1. Déterminer, sans calcul, en utilisant le groupe des isométries de P la nature et les éléments caractéristiques des applications

$$f_1 = \mathcal{R}_1 \circ S \quad \text{et} \quad f_2 = \mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2$$

2. Confirmer ces résultats à l'aide des expressions analytiques de f_1 et de f_2 ?

PROBLÈME

Partie A

On se propose de déterminer l'ensemble F des fonctions f numériques d'une variable réelle définies sur $] -1; +\infty[$, dérivables sur cet intervalle vérifiant :

$$\forall x \in] -1; +\infty[, \quad (1+x)f'(x) + f(x) = 1 + \text{Log}(1+x)$$

($\text{Log}(1+x)$ est le logarithme népérien de $(1+x)$).

1. Soit $f \in F$ et soit g définie par :

$$\forall x \in] -1; +\infty[, \quad g(x) = (1+x)f(x).$$

Démontrer que g est dérivable sur $] -1; +\infty[$ et que g est une primitive de la fonction h définie par :

$$\forall x \in] -1; +\infty[, \quad h(x) = 1 + \text{Log}(1+x)$$

Réciproquement, soit g_1 une primitive de la fonction h . Démontrer que la fonction f_1 définie par :

$$\forall x \in]-1; +\infty[, \quad f_1(x) = \frac{g_1(x)}{1+x}$$

est un élément de F .

2. a. Déterminer les réels A et B tels que

$$\forall x \in]-1; +\infty[, \quad \frac{x}{1+x} = A + \frac{B}{1+x}$$

- b. À l'aide d'une intégration par parties déterminer l'ensemble des primitives de la fonction h .
c. En déduire l'ensemble F .

Partie B

On considère l'ensemble des fonctions f_k de $] - 1 ; +\infty[$ vers \mathbb{R} définies par :

$$\forall x \in]-1; +\infty[, \quad f_k(x) = \text{Log}(1+x) + \frac{k}{1+x}, \quad k \in \mathbb{R}$$

- Discuter suivant les valeurs de k , le sens de variation des fonctions f_k .
- Tracer, avec soin, dans un même repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ les représentations graphiques des fonctions f_1, f_0, f_{-1} .
- Soient $M_1(t), M_2(t), M_3(t)$ les points d'abscisse t sur les représentations graphiques respectives des fonctions $f_{k_1}, f_{k_2}, f_{k_3}$. Démontrer que le rapport :

$$\frac{\overline{M_1(t)M_2(t)}}{\overline{M_1(t)M_3(t)}} \text{ est indépendant de } t.$$

Partie C

- Soit $P_n(x) = \sum_{k=0}^{k=2n-1} (-1)^k x^k = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots - x^{2n-1}$.

Démontrer par récurrence que pour tout entier n et pour tout réel $x \in]-1; +\infty[$

$$f_0'(x) = P_n(x) + \frac{x^{2n}}{1+x}$$

- Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in]0; 1[, \quad \frac{x^{2n}}{1+x} \leq x^{2n}$.

En déduire pour tout entier $n \geq 1$ la double inégalité

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x} dx \leq \frac{1}{2n+1}.$$

- On considère la suite (w_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad w_n = \sum_{k=1}^{k=2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2n}.$$

Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_0(1) = w_0 + \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x} dx$.

En déduire que la suite (w_n) admet, lorsque n tend vers $+\infty$, une limite que l'on précisera. Trouver un entier n_0 tel que $\text{Log} 2 - w_{n_0} < 0, 1$.