

## ∞ Baccalauréat C Lyon septembre 1977 ∞

### EXERCICE 1

3 POINTS

Soit  $f$  la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$f(x) = x(1 - \text{Log}|x|).$$

1. Étudier ses variations.
2. Construire sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé.
3. Calculer l'aire de la partie de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  définie par

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq e \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

$e$  étant la base des logarithmes népériens.

### EXERCICE 2

3 POINTS

Un plan affine euclidien orienté est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . On considère, l'application  $f$  qui, à tout point  $M(x; y)$ , fait correspondre le point  $M'(x'; y')$  défini par :

$$\begin{cases} x' = x - y\sqrt{3} + \sqrt{3} \\ y' = x\sqrt{3} + y + \sqrt{3}. \end{cases}$$

Démontrer que  $f$  est une similitude et déterminer les éléments caractéristiques de  $f$ .

### PROBLÈME

12 POINTS

Les parties B et C sont indépendantes l'une de l'autre.

Soit  $\mathcal{M}$  l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels muni de sa structure d'espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  et de sa structure d'anneau unitaire.

#### Partie A

1. On considère la matrice  $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ . Calculer son carré.
2. On désigne par  $I$  la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et on considère l'ensemble  $F$  des matrices de la forme  $A = \alpha I + \beta J$  où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des nombres réels.
3. **a.** Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}$ , et que  $(I, J)$  est une base de  $F$ .  
**b.** Montrer que  $F$  est stable pour la multiplication dans  $\mathcal{M}$ , et en déduire que  $F$  est un anneau commutatif et unitaire. Cet anneau est-il un corps?

#### Partie B

On appelle  $\psi$  l'application de  $F$  dans  $\mathbb{C}$  qui, à toute matrice  $A = \alpha I + \beta J$  de  $F$ , associe le nombre complexe  $z = \alpha + \beta i$ .

1. **a.** Montrer que  $\psi$  est un isomorphisme de  $(F, +)$  sur  $(\mathbb{C}, +)$ .  
**b.** L'application  $\psi$  est-elle un isomorphisme de  $(F, \times)$  sur  $(\mathbb{C}, \times)$ ?

2. Aux deux nombres complexes  $z = \alpha + i\beta$  et  $z' = \alpha' + i\beta'$ , l'application  $\psi^{-1}$  fait correspondre les deux matrices  $A = \alpha I + \beta J$  et  $A' = \alpha' I + \beta' J$ .

On considère la loi de composition interne dans  $\mathbb{C}$ , notée  $\star$  et définie par

$$z \star z' = \psi(A \times A').$$

- a. Exprimer  $(\alpha + i\beta) \star (\alpha' + i\beta')$ .
  - b. Quelle est la restriction de la loi  $\star$  à  $\mathbb{R}$ ?
  - c. Quelle est la restriction de la loi  $\star$  à l'ensemble des imaginaires purs?
3. Etant donné un nombre complexe  $z$ , on note  $z^{(0)} = 1$ ,  $z^{(1)} = z$  et  $z^{(n)} = z^{(n-1)} \star z$  pour tout entier naturel non nul  $n$ .
- a. Calculer  $i^{(2)}$  puis  $i^{(n)}$  pour  $n > 2$ .  
En posant  $z = \alpha + i\beta$ , démontrer que  $z^{(n)} = \alpha^n + n\alpha^{n-1}\beta i$  pour  $n \geq 1$ .
  - b. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations :

$$z^{(2)} = 1; z^{(3)} = 1; z^{(n)} = 1; z^{(2)} - z - i = 0.$$

4. Dans le plan complexe, on considère le point  $M_1$  d'affixe  $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$  et les points  $M_2, M_3, \dots, M_n$  d'affixes respectives  $z_2 = z_1^2, z_3 = z_1^3, z_n = z_1^n$ .  
Calculer les coordonnées  $x_n$  et  $y_n$  du point  $M_n$ , puis les limites respectives des suites  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

### Partie C

Soit  $P$  le plan vectoriel euclidien orienté de base orthonormée directe  $(\vec{i}, \vec{j})$  et soit  $f$  l'endomorphisme de  $P$  de matrice  $A = \alpha I + \beta J$  et soit  $\varphi$  l'endomorphisme de matrice  $J$ .

1. a. À quelle condition  $f$  est-il un automorphisme de  $P$ ?  
b. Quel est le noyau de  $\varphi$ ? Quelle est l'image de  $\varphi$ ?
2. a. Soit  $\rho$  la rotation vectorielle de  $P$  dont la mesure (élément de  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ ) admet pour représentant  $\frac{\pi}{4}$ .  
On considère les vecteurs  $\vec{i}_1 = \rho(\vec{i})$  et  $\vec{j}_1 = \rho(\vec{j})$  qui forment donc une base  $(\vec{i}_1, \vec{j}_1)$  orthonormée directe. Exprimer  $\vec{i}_1$  et  $\vec{j}_1$  en fonction de  $\vec{i}$  et de  $\vec{j}$ .  
b. Démontrer que la matrice de  $f$  dans cette nouvelle base est  $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ -2\beta & \alpha \end{pmatrix}$ .  
En déduire la matrice de  $\varphi$  dans la base  $(\vec{i}_1, \vec{j}_1)$ . Soit  $\vec{V} = x\vec{i}_1 + y\vec{j}_1$ .  
Quelles sont les composantes du vecteur  $\varphi(\vec{V})$  dans la base  $(\vec{i}_1, \vec{j}_1)$ ?  
c. Démontrer qu'il existe une homothétie vectorielle  $h$ , une rotation vectorielle  $r$  et un projecteur  $p$  tels que  $\varphi = h \circ r \circ p$ .