

∞ Baccalauréat C Lyon septembre 1980 ∞

I.

1. Quels sont les entiers naturels dont le carré est un diviseur de 1980?
2. Soit a et b des éléments de \mathbb{N}^* dont le p.g.c.d. est noté d et le p.p.c.m. est noté m . Déterminer a et b sachant que

$$m^2 - 5d^2 = 1980.$$

II.

1. Étudier la fonction numérique f définie par 1

$$f(x) = \frac{1}{x \operatorname{Log} x},$$

où $\operatorname{Log} x$ désigne le logarithme népérien de x , et tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

2. Montrer que la fonction g définie sur $]1; +\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$ est continue et strictement décroissante sur $]1; +\infty[$.

Déterminer ses limites lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures et lorsque x tend vers $+\infty$.

En déduire qu'il existe un seul point d'intersection de (C) et de la droite d'équation $y = x$.

On désigne par α l'abscisse de ce point. Vérifier que $\alpha < e$.

3. Calculer en fonction de α l'aire de la portion du plan ensemble des points M de coordonnées $(x; y)$ vérifiant

$$\begin{cases} \alpha & \leq x \leq e \\ f(x) & \leq y \leq x. \end{cases}$$

III.

Soit P un plan affine euclidien orienté associé au plan complexe muni de sa structure euclidienne et soit $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé direct de P .

Partie A

m étant un réel donné, soit f_m l'application affine de P dans P qui au point M de coordonnées (x, y) dans \mathcal{R} associe le point M' de coordonnées $(x'; y')$ dans \mathcal{R} telles que

$$\begin{cases} x' & = & my + m + 1 \\ y' & = & mx + m + 1. \end{cases}$$

1. On désigne par z et z' les affixes respectives de deux points M et M' . Exprimer z' en fonction de z lorsque $M' = f_m(M)$.
2. À quelle condition f_m est-elle bijective?
3. Donner suivant les valeurs de m l'ensemble des points de P invariants par f_m .
4. Montrer que f_1 est la composée de deux applications simples qui commutent et qu'on déterminera.
5. Caractériser f_{-1} .

6. On suppose m différent de 0, de 1, et de -1 . Montrer que f_m est la composée de deux applications simples qui commutent et qu'on déterminera. (on pourra utiliser $\epsilon = \frac{m}{|m|}$.)
7. Dans cette question on prend $m = \frac{1}{2}$ et on considère la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de P définie de la façon suivante :
 M_0 est le point de coordonnées $(1; 0)$ et pour tout entier naturel $n : M_{n+1} = f_{\frac{1}{2}}(M_n)$.
- a. Démontrer que $f_{\frac{1}{2}} \circ f_{\frac{1}{2}}$ est une homothétie dont on précisera le centre Ω et le rapport.
 Sur un dessin, tracer le repère \mathcal{R} et placer les points Ω, M_0, M_1, M_2 et M_3 .
- b. Pour tout entier naturel n , exprimer les vecteurs $\overrightarrow{\Omega M_{2n}}$ et $\overrightarrow{\Omega M_{2n+1}}$ en fonction de deux vecteurs fixes.
 En déduire que les points M_n appartiennent, quand n décrit \mathbb{N} , à la réunion de deux demi-droites affines qu'on précisera.
- c. Pour tout entier naturel n , on désigne par x_n , et y_n les coordonnées du point M_n . Calculer les valeurs de x_{2n} et y_{2n} , x_{2n+1} et y_{2n+1} en fonction de n .
 Montrer que, pour tout entier naturel n , $|x_n - 3|$ et $|y_n - 3|$ sont majorés par $\frac{3}{2^n}$
 Les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont-elles convergentes?

Partie B

1. On considère les fonctions u et v définies sur \mathbb{R} par

$$u(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad v(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

- a. Dresser le tableau de variations de v [on remarquera que $v(0) = 0$] puis celui de u .
 b. Montrer que pour tout x réel $[u(x)]^2 - [v(x)]^2 = 1$.
2. Soit M un point mobile dont les coordonnées dans \mathbb{R} sont définies à l'instant t par

$$\begin{cases} x &= e^t + e^{-t} + 2 \\ y &= \frac{e^t - e^{-t}}{2} - 1. \end{cases}$$

En utilisant les propriétés du 1., démontrer que la trajectoire T de M (quand t décrit \mathbb{R}) est incluse dans une conique K qu'on caractérisera (centre, sommets, asymptotes éventuelles).

Préciser la portion de cette conique qui est effectivement la trajectoire T de M .

Tracer cette trajectoire dans le repère R.

3. a. Déterminer les vecteurs vitesse et accélération de M .
 b. Pour quelles valeurs de t le mouvement est-il accéléré? retardé?
 Indiquer sur le dessin les parties correspondantes de T.

Partie C

Soit O' un point de P. On désigne par \mathcal{R}' le repère (O', \vec{i}, \vec{j}) orthonormé de P.

Soit H l'hyperbole d'équation $\frac{X^2}{4} - Y^2 = 1$ dans \mathcal{R}' .

On désigne par D' et D'' les droites d'équations respectives $Y = 0$ et $X = 0$ dans \mathcal{R}' . On utilisera, dans la suite, le fait que D' et D'' sont les seuls axes de symétrie orthogonale de H et que leur intersection O' est le seul centre de symétrie de H.

Soit f une similitude de P telle que $f(H) = H$ [donc $f^{-1}(H) = H$]. On note φ son endomorphisme associé et g la symétrie de centre O' .

1. Montrer que $G = f \circ g \circ f^{-1}$ est la symétrie de centre $f(O')$ et que $G(H) = H$.
En déduire que $f(O') = O'$.
2. On désigne par s' et s'' les symétries orthogonales d'axes respectifs D' et D'' . On pose $S' = f \circ s' \circ f^{-1}$ et $S'' = f \circ s'' \circ f^{-1}$.
 - a. Montrer que S' et S'' sont deux isométries involutives; en déduire que ce sont les symétries orthogonales d'axes $f(D')$ et $f(D'')$.
 - b. Montrer que $S'(H) = H$ et $S''(H) = H$.
En considérant les images par f des sommets de H , en déduire que $f(D') = D'$ et $f(D'') = D''$.
3. a. Montrer que $\varphi(\vec{i}) \in \{\vec{i}, -\vec{i}\}$. En déduire que f est une isométrie.
b. Montrer que l'ensemble des similitudes f de P telles que $f(H) = H$ est un groupe à quatre éléments.
4. On désigne par K' l'image de la conique K [définie en B) 2. par l'application f_3 (définie en A) pour $m = 3$] et on suppose que O' est le centre de K .
 - a. Montrer que K' est une hyperbole (on pourra déterminer une équation de K' dans \mathbb{R}).
 - b. Soit F une similitude de P . Montrer que $F(K) = K'$ si, et seulement si,

$$\left[(f_3)^{-1} \circ F \right] (K) = K.$$
 En déduire que l'ensemble des similitudes F de P qui transforment K en K' est constitué par deux similitudes directes et deux similitudes indirectes.