∽ Baccalauréat C Lyon septembre 1978 ∾

EXERCICE 1 **3 POINTS**

1. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation

$$x - 9y = 13$$

2. Déterminer tous les éléments $(a\,;\, b)$ de $\mathbb{N}^2$ qui vérifient la relation suivante :

$$\text{PPCM}(a, b) - 9\text{PGCD}(a, b) = 13.$$

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O}\,;\, \overrightarrow{\imath},\, \overrightarrow{\jmath}\right)$ on considère la courbe (C) d'équation

$$3x^2 + 4y^2 + 6x - 9 = 0.$$

1. Déterminer la nature de (C) et préciser tous ses éléments remarquables. Tracer la courbe (C).
2. Soit M un point de (C) d'affixe $z = x + \text{i}y$.
   On pose $|z| = \rho$ et $\text{Arg}\, z = \theta \pmod{2\pi}$. Calculer ρ en fonction de θ ?
3. Soient M et M' deux points de (C) dont les affixes ont pour arguments respectifs θ et $\theta + \pi$.
   Calculer la distance $d(M,\, M')$ de ces deux points.

PROBLÈME **13 POINTS**

On désigne par P un plan vectoriel euclidien rapporté à une base orthonormée $\left(\overrightarrow{\imath},\, \overrightarrow{\jmath}\right)$. On note F l'espace vectoriel des fonctions numériques définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et on désigne par F_{P} l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans P.
Pour tout couple $(\alpha\,;\, \beta)$ de nombres réels, on note par $\varphi_{(\alpha\,;\,\beta)}$ l'endomorphisme de P de matrice $\begin{pmatrix} \alpha+\beta & \beta \\ 2\alpha & 3\beta \end{pmatrix}$ dans la base $\left(\overrightarrow{\imath},\, \overrightarrow{\jmath}\right)$.

Partie A

1. **a.** Montrer que l'endomorphisme $\varphi_{(\alpha\,;\,\beta)}$ est bijectif si et seulement si le nombre réel $\beta(\alpha+3\beta)$ n'est pas nul.
   b. Existe-t-il des couples $(\alpha\,;\, \beta)$ tels que $\varphi_{(\alpha\,;\,\beta)}$ soit un endomorphisme orthogonal ?
2. Pour tout nombre réel $\lambda \neq 0$ on désigne par E_λ l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{u}$ de P vérifiant la relation

$$\varphi_{(-1\,;\,1)}\left(\overrightarrow{u}\right) = \lambda \overrightarrow{u}.$$

   a. Montrer que l'ensemble E_λ n'est jamais vide et que c'est un sous-espace vectoriel de P.
   b. Déterminer les valeurs de λ pour lesquelles on a $E_\lambda \neq \{\overrightarrow{0}\}$.
   c. Établir que E_1 est la droite vectorielle engendrée par le vecteur
   $\overrightarrow{I} = \overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath}$ et que E_2 est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\overrightarrow{J} = \overrightarrow{\imath} + 2\overrightarrow{\jmath}$.

3. Montrer que le couple $\left(\overrightarrow{I},\ \overrightarrow{J}\right)$ est une base de l'espace vectoriel P.

4. Soit $\overrightarrow{V}$ un vecteur de P, on désigne par $(x\ ;\ y)$ ses coordonnées dans la base $\left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ et par $(X\ ;\ Y)$ ses coordonnées dans la base $\left(\overrightarrow{I},\ \overrightarrow{J}\right)$. Exprimer X et Y en fonction de x et y.

5. Quelle est la matrice de $\varphi_{(-1\ ;\ 1)}$ dans la base $\left(\overrightarrow{I},\ \overrightarrow{J}\right)$?

Partie B

Pour toute fonction f de F on désigne par f' la fonction dérivée de f et lorsque f' est dérivable par f'' la fonction dérivée seconde de f. On notera par θ l'application nulle sur $\mathbb{R}$.

1. Soit α un nombre réel; on considère l'ensemble F_α des éléments f de F vérifiant l'équation

$$f' - \alpha f = \theta.$$

a. Montrer que F_α est un sous-espace vectoriel de F.

b. Soit f un élément de l'espace F; établir que la fonction f appartient à l'espace F_α si et seulement si la fonction numérique g définie en tout point $x \in \mathbb{R}$ par $g(x) = f(x)\mathrm{e}^{-\alpha x}$ (e représentant la base des logarithmes népériens) vérifie la relation $g' = \theta$?

c. En déduire que l'espace F_α coïncide avec la droite vectorielle engendrée par le vecteur $x \longmapsto \mathrm{e}^{\alpha x}$.

2. À tout élément f de F, on associe l'élément $\overrightarrow{f}$ de F défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{f}(x) = f(x)\overrightarrow{\imath} + f'(x)\overrightarrow{\jmath}.$$

Dans toute la suite du problème on suppose que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

a. Montrer que $\overrightarrow{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa fonction dérivée $\overrightarrow{f'}$.

b. Soient f_1 et f_2 les fonctions composantes dans la base $\left(\overrightarrow{I},\ \overrightarrow{J}\right)$ de la fonction vectorielle $\overrightarrow{f}$; montrer que l'on a $f_1 = 2f - f'$, $f_2 = f' - f$ et en déduire les composantes de $\overrightarrow{f'}$ dans la base $\left(\overrightarrow{I},\ \overrightarrow{J}\right)$.

3. Soit G l'ensemble des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$, deux fois dérivables et vérifiant la relation

$$f'' - 3f' + 2f = 8.$$

a. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de F.

b. Etablir que f est un élément de G si et seulement si on $\overrightarrow{f'} = \varphi_{(-1\ ;\ 1)} \circ \overrightarrow{f}$.

c. En déduire que f appartient à G si et seulement si la condition suivante est satisfaite :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} f_1'(x) \\ f_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$$

4. Montrer que l'espace vectoriel G est engendré par les vecteurs $x \longmapsto \mathrm{e}^{x}$ et $x \longmapsto \mathrm{e}^{2x}$.

5. Déterminer une base de l'espace vectoriel G.