

∞ Baccalauréat C Lyon septembre 1979 ∞

EXERCICE 1

3 POINTS

Soit k un élément de \mathbb{Z} .

Démontrer que les nombres $2k + 1$ et $9k + 4$ sont premiers entre eux.

Démontrer que le PGCD des nombres $2k - 1$ et $9k + 4$ est nécessairement 1 ou 17.

Pour quelles valeurs de k ce PGCD est-il égal à 17?

EXERCICE 2

5 POINTS

Soit \mathcal{P} un plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On identifiera le plan \mathcal{P} au plan complexe en associant à tout point $M \in \mathcal{P}$, de coordonnées x et y , le nombre complexe $z = x + iy$.

Soit u un nombre complexe et f_u l'application, de \mathcal{P} dans \mathcal{P} , associant à tout point $M(z)$ le point $M'(z')$ où

$$z' = -u^2 \bar{z} + 2\bar{u}.$$

1. Trouver la nature et les éléments géométriques caractéristiques de chacune des applications suivantes :
 - a. $f = f_u$ pour $u = 1$;
 - b. $g = f_u$ pour $u = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.
2. On pose $h = g \circ f$
 - a. Dédire la nature de h de celles de f et g .
 - b. Construire géométriquement le centre de h .
 - c. Retrouver par le calcul les éléments de h .

PROBLÈME

12 POINTS

Première partie

Pour tout couple de réels $(a; b)$ on note $f_{(a, b)}$ la fonction, de $]0; +\infty[$ vers \mathbb{R} , définie par

$$f_{(a, b)}(x) = ax + b \operatorname{Log} x,$$

et on appelle $C(a, b)$ la courbe représentative de $f_{(a, b)}$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Démontrer que la courbe $C(-a; -b)$ est l'image de la courbe $C(a; b)$ dans une symétrie que l'on précisera.
2. Etudier les variations de $f_{(a, b)}$ suivant les valeurs de a et b .
3. Construire les courbes $C(1, 0)$, $C(0, 1)$, $C(1, 1)$ et $C\left(\frac{1}{e}, -1\right)$ en prenant 2 cm pour unité de longueur.
4. a. Justifier, pour tout $x > 0$, l'existence de l'intégrale

$$A_{(a, b)} = \int_1^x f_{(a, b)}(t) dt$$

et calculer sa valeur.

- b. Étudier la limite de $A_{(a,b)}(x)$ lorsque x tend vers zéro, puis celle de $\frac{1}{x^2} A_{(a,b)}(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
- c. En supposant $a = \frac{1}{e}$ et $b = -1$, calculer, pour $\lambda > 0$, l'aire du domaine limité par la courbe $C(a, b)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = h$.

Deuxième partie

1. On appelle F l'ensemble des fonctions $f_{(a,b)}$. Démontrer que F est un espace vectoriel sur \mathbb{R} lorsqu'on le munit des lois d'addition des fonctions et de multiplication des fonctions par un nombre réel.
Donner une base de F . Quelle est la dimension de F ?
2. On désigne par \mathbb{R}_+^* l'ensemble des réels strictement positifs. Déterminer les éléments de F qui sont des isomorphismes du groupe multiplicatif (\mathbb{R}, \times) sur le groupe additif $(\mathbb{R}, +)$. Forment-ils un espace vectoriel?

Troisième partie

On désigne par P le plan affine euclidien muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. a. Déterminer l'ensemble H des points M du plan P dont le produit des coordonnées est égal à leur somme. Montrer que H admet un centre de symétrie O .
Écrire l'équation de H dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et donner la nature de H .
- b. Déterminer l'ensemble des points M du plan P , de coordonnées $(x; y)$, tels que l'on ait :

$$f_{(a,b)}(xy) = f_{(a,b)}(x) + f_{(a,b)}(y)$$

pour tout couple $(a; b)$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

2. On appelle P' l'ensemble P privé du point $A(1; 0)$. On considère l'application h , de P' dans P , qui à tout point M d'affixe le nombre complexe z , associe le point M' d'affixe z' telle que $zz' = z + z'$.
- a. Prouver que M' est un élément de P' .
- b. Démontrer que h est involutive et déterminer ses points invariants.
- c. Calculer $(z-1)(z'-1)$.
En déduire l'image par h du cercle Γ de centre A et de rayon 1. Quelle est la nature de la restriction de h à ce cercle Γ ?
- d. Montrer que l'image M' d'un point M de P' d'affixe réelle x est un point d'affixe réelle x' .
Quelle est la liaison avec l'ensemble H de 1.?