∽ Baccalauréat C septembre 1981 Lyon ∾

EXERCICE 1

Soit la fonction

$$f\,:\,x \longmapsto x + \text{Log}\,(x+1).$$

1. Étudier f et tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé (unité : 2 cm).
2. Calculer en cm^2 l'aire du domaine limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = \alpha$ où $\alpha \in]-1\,;\,0]$.
   Cette aire a-t-elle une limite quand α tend vers -1 par valeurs supérieures ?

EXERCICE 2

1. Déterminer l'ensemble E des entiers relatifs n tels que $n-1$ divise $n+3$.
2. Démontrer que pour tout entier relatif n, les entiers $n-1$ et n^2+2n-2 sont premiers entre eux.
3. Déterminer l'ensemble F des entiers relatifs n tels que $(n-1)\left(2n^3+1\right)$ divise $(n+3)\left(n^2+2n-2\right)$.

EXERCICE 3

Soit P un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

Partie A

Soit U la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = u_{n-1} + n(-1)^{n+1}.$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 et construire dans P les points A_n de coordonnées $(n\,;\,u_n)$ pour $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.
   Le dessin sera fait sur une feuille de papier millimétrique (unité : 2 cm) et sera appelé dans la suite « figure 1 ».
2. On désigne par V et W les suites telles que, pour tout $n \geqslant 0$,

   $$V_n = u_{2n} \quad \text{et} \quad W_n = u_{2n+1}.$$

   Démontrer que V et W sont des suites arithmétiques.
   Calculer V_n et W_n en fonction de $n (n \geqslant 0)$ et vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{2n-1} = -u_{2n}$.
3. On désigne par E l'ensemble des points A_n de coordonnées $(n\,;\,u_n)$ lorsque n décrit $\mathbb{N}$.
   a. Démontrer que E est inclus dans la réunion de deux droites D et D$'$ que l'on dessinera sur la figure 1.
   b. On désigne par s l'application de P dans P qui à un point M d'affixe z associe le point M' d'affixe

   $$z' = \overline{z} + \frac{1}{2}\text{i}.$$

   Quelle est la nature de s ? Caractériser géométriquement s.
   c. Démontrer que D $\cap$ D$'$ est globalement invariant par s.
   En est-il de même pour l'ensemble E ?

4. Déterminer suivant la valeur du réel k la nature de l'ensemble C_k des points M de P tels que

$$\left(\overrightarrow{MA_0}+\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MA_2}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MA_3}+\overrightarrow{MA_4}+\overrightarrow{MA_5}\right)=k.$$

Représenter C_k pour $k=\dfrac{27}{2}$ sur la figure 1.

Partie B

1. On considère la fonction

$$g\,:\,x\longmapsto 2x+1-\frac{2}{\pi}\text{cotg}\,(\pi x).$$

a. Déterminer l'ensemble de définition de g.
Pour $n\in\mathbb{N}$, on désigne par g_n la restriction de g à l'intervalle $]n\,;\,n+1[$. Démontrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in]n\,;\,n+1[$,

$$g_n(x)=g_0(x-n)+2n.$$

b. Donner le tableau de variation de g_0 puis celui de g_n pour $n\geqslant 1$.

c. Démontrer que g_n est bijective.
En déduire le nombre de solutions de l'équation $g(x)=0$ qui appartiennent à $]n\,;\,n+1[$.

2. On considère la fonction

$$f\,:\,x\longmapsto\frac{1}{4}[1-(2x+1)\cos(\pi x)]$$

et on désigne par C sa courbe représentative dans P (ne pas construire C avant la question 2 d.

a. Démontrer que l'ensemble E de la question A. 3 est inclus dans C.

b. Démontrer qu'en tout point A_n de E la tangente à C est l'une des droites D ou D$'$ de la question A 3.

c. Démontrer que, pour tout réel x non entier,

$$f'(x)=\frac{\pi}{4}\sin(\pi x).g(x)$$

En utilisant la question B 1 établir pour tout $n\in\mathbb{N}$ le tableau de variation de f sur $[n\,;\,n+1]$. On distinguera les cas n pair et n impair et on ne cherchera pas à calculer l'extrémum de f sur cet intervalle.

d. Démontrer que pour tout réel positif x on a l'inégalité

$$-\frac{1}{2}x\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}.$$

Tracer la partie de C correspondant à $x\in[0\,;\,5]$.