

♻ Baccalauréat C Lyon juin 1966 ♻

Mathématiques élémentaires

EXERCICE 1

Un point O situé sur l'axe d'un cylindre C de révolution est le centre d'une sphère S dont le rayon est supérieur à celui de C . On appelle Σ le solide formé des points intérieurs à la sphère S et extérieurs au cylindre C .

Montrer que le volume de Σ s'exprime uniquement en fonction de la distance h des plans contenant les cercles d'intersection de C et de S .

EXERCICE 2

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé $x'Ox, y'Oy$, on considère, d'une part, le faisceau des cercles (Ω_λ) tangents à $x'Ox$ au point d'abscisse 1 et dont les centres sont les points ω_λ de coordonnées $(1; \lambda)$ et, d'autre part, le faisceau des droites $O\omega_\lambda$.

On désigne par M_λ et M'_λ les points d'intersection de (Ω_λ) et de $O\omega_\lambda$, M'_λ étant celui de ces points dont l'abscisse est supérieure à 1.

L'objet du problème est l'étude de l'ensemble (Γ) décrit par les points M_λ et M'_λ lorsque λ décrit l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

1. Quel est le transformé de (Γ) par l'inversion de pôle O et de puissance 1 ?
Quel est le transformé de (Γ) par la symétrie d'axe $x'Ox$?
2. Calculer, en fonction de λ , les distances OM_λ et OM'_λ .
Calculer les limites de ces distances quand λ tend vers $+\infty$.
Calculer, en fonction de λ , la distance de M à la droite d'équation $x = 2$.
Calculer la limite de cette distance lorsque λ tend vers $+\infty$.
Quelle est la propriété géométrique de (Γ) mise en évidence par ce résultat ?
3. Le nombre λ étant donné, écrire l'équation du cercle $(O\Omega_\lambda)$ et celle de la droite $O\omega_\lambda$.
En déduire une relation indépendante de λ entre les coordonnées d'un point de (Γ) .
4. Soit f l'application de $[0; +2[$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = (x-1)\sqrt{\frac{x}{x-1}}.$$

- a. Soit (Γ_1) le graphe de f dans le plan rapporté à $x'Ox, y'Oy$. Comment peut-on déduire (Γ) de (Γ_1) ?
 - b. Montrer, avant d'entreprendre le calcul de toute dérivée, que la fonction dérivée de f prend, au moins une fois, la valeur 0 dans l'intervalle $]0; +1[$.
 - c. Étudier f et construire (Γ_1) , puis (Γ) . On précisera l'allure de (Γ) au voisinage du point d'abscisse 1.
5. On considère maintenant deux nombres réels, λ et μ .
 - a. Montrer que les points $M_\lambda, M'_\lambda, M_\mu$ et M'_μ sont situés sur un même cercle, dont on désigne le centre par $\sigma_{\lambda\mu}$.

b. Montrer que les points $O, \omega_\lambda, \omega_\mu$ et $\sigma_{\lambda\mu}$ sont cocycliques.

En supposant λ fixe, déterminer la position limite τ_λ de $\sigma_{\lambda\mu}$ quand μ tend vers λ .

Quel est l'ensemble des points τ_λ lorsque λ décrit $\mathbb{R}$?