Lyon juin 1967
Baccalauréat mathématiques élémentaires et mathématiques et technique

EXERCICE 1

Soit f la fonction définie, pour tout nombre réel x, par

$$f(x) = \cos x - \cos^2 x.$$

1. Étudier les variations de f et tracer le graphique, C, de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $x\mathrm{O}y$ (on étudiera d'abord f dans l'intervalle $[0\,;\,\pi]$).
2. Déterminer l'aire du domaine limité par le segment OA, où A est le point de Ox d'abscisse $+\dfrac{\pi}{2}$, et par l'arc $\overset{\frown}{\mathrm{OA}}$ de C.

EXERCICE 2

Déterminer, en fonction des valeurs de $\theta \in [-\pi\ ;\ +\pi[$, le module et l'argument du nombre complexe

$$z = \sin\theta(\sin\theta + \mathrm{i}\cos\theta).$$

EXERCICE 3

On désigne par a et b deux nombres réels fixes et différents de 0 et par m un nombre réel arbitraire.
Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $x\mathrm{O}y$, on désigne par A le point de Ox d'abscisse a, par B le point de Oy d'ordonnée b et par M le point de Ox d'abscisse variable, m.

1. Soit M' le point d'intersection de Oy avec la parallèle à la droite AB menée par M.
   Déterminer, lorsque m varie, l'ensemble des points communs aux droites AM' et BM (on montrera que cet ensemble est formé de la droite AB et d'une droite passant par O).
2. Soit c et d deux nombres réels fixes, avec $c \neq 0$.
   À chaque point $M(m\,;\,0)$ de Ox, on fait correspondre le point $N(0\,;\,cm+d)$ de Oy et l'on désigne par F l'application $M \longmapsto N$ ainsi obtenue. On note donc $N = F(M)$.
   a. Montrer que F est une application bijective de Ox sur Oy.
   Soit Q $= F(\mathrm{O})$ et P le point de Ox tel que $F(\mathrm{P}) = \mathrm{O}$.
   Calculer l'ordonnée de Q et l'abscisse de P.
   b. Montrer qu'il existe une similitude, $\sum$, du plan, dont on déterminera le centre, S, (par ses coordonnées) et l'angle, θ (défini à 2π près), telle que, pour tout point M de Ox, on ait $F(M) = \sum(M)$. (On prouvera que S est un point de la droite PQ, que l'on précisera.)
   Étudier le cas où $d = 0$.
3. En supposant $d \neq 0$, déterminer l'ensemble des projections orthogonales de S sur la droite variable MN.
4. Indiquer comment choisir d en fonction de c pour que $B = F(A)$. Déterminer alors, lorsque c varie, l'ensemble des points S.
5. On suppose que c et d sont fixes et choisis pour que $F(A) = B$. Déterminer, lorsque m varie, l'ensemble des points communs aux droites AN et BM.