∽ Baccalauréat Lyon série mathématiques ∾
septembre 1952

I. - 1er sujet.

Précession des équinoxes.
Année sidérale et année tropique.
Calendriers.

I. - 2e sujet

Intersection d'une droite et d'un plan en géométrie descriptive.

I. - 3e sujet

Trigonométrie : Établir la formule qui donne $\cos(a+b)$ ou (si l'on préfère) la formule qui donne $\cos(a-b)$ en fonction des lignes trigonométriques des arcs a et b.

II.

Notation : A et B étant deux points quelconques, la circonférence dont le segment AB est un diamètre sera appelée circonférence (AB).

1. On donne une conique Γ de centre 0, de foyers F et F$'$, et dont les sommets de l'axe focal sont appelés A et A$'$ (A et F étant d'un même côté de O).

   Un point M décrivant la conique Γ, quelle est l'enveloppe du cercle de centre M passant par F (c'est-à-dire la courbe à laquelle ce cercle reste tangent) ?

   En déduire par homothétie l'enveloppe du cercle de diamètre MF [qu'on appellera simplement cercle (MF) d'après la convention du début].
2. On considère maintenant une corde MM$'$ de Γ, qui varie en passant constamment par F, et le but du problème est de trouver, lorsque la corde focale MM$'$ pivote autour de F, l'enveloppe du cercle (MM$'$) et le lieu de son centre P (milieu de MM$'$).

   Pour celà, on effectue d'abord l'inversion de centre F qui conserve le cercle principal de Γ.

   a. En se servant du résultat de la première question, construire d'une manière très simple les inverses des cercles (MF) et (M$'$F).

   b. En déduire la construction du transformé (C) du cercle (MM$'$). Montrez que (C) a un rayon constant et trouvez le lieu de son centre (on désignera par I le milieu de OF).

   c. En déduire que, lorsque la corde focale MM$'$ pivote autour de F, le cercle (C) reste tangent aux cercles de centre I qui passent l'un par A, l'autre par A$'$.
3. En revenant alors à la figure initiale, montrez que le cercle (MM$'$) reste tangent à deux cercles fixes dont l'un passe par A (on l'appellera Ω et son centre sera désigné par ω) et l'autre passe par A$'$ (on l'appellera Ω' et son centre sera désigné par ω').

   Montrez que le faisceau défini par les cercles Ω et Ω' admet F pour point de Poncelet et, pour axe radical, la directrice Δ de la conique Γ associée au foyer F.

   N'y a-t-il pas un autre cercle très simple faisant partie de ce faisceau ?

   On désigne par Φ le deuxième point de Poncelet de ce faisceau.

   Montrez, en vous servant de la figure inverse étudiée à la 2e question, que, si l'excentricité e de Γ est inférieure à 2, les points F et Φ sont de part et d'autre du cercle (MM$'$) quelle que soit la position de la corde MM$'$.

   Au contraire, si $e > 2$, les points F et Φ sont d'un même côté de MM$'$.

Que se passe-t-il si $e = 2$?

Dire ce que devient alors le cercle Ω' et caractériser les coniques Γ correspondantes par l'angle de leurs asymptotes.