Baccalauréat Lyon septembre 1966
série mathématiques élémentaires

I.

Comment faut-il choisir l'entier naturel n pour que $A = 2^n - 1$ soit divisible par 9 ?
Cette condition étant supposée réalisée, montrer que A est divisible par 7.
Quel est le reste de la division de A par 21 ?

II.II. - Dans un plan rapporté à un repère. orthonormé $x'\mathrm{O}x$, $y'\mathrm{O}y$, soit J le point de coordonnées a et $4a$, a étant un nombre réel strictement positif.

1. Écrire l'équation du cercle (C) de centre J et de rayon $5a$.
   Calculer les coordonnées des points, A et B, où (C) coupe $x'\mathrm{O}x$ et la puissance, p, de O par rapport à (C).
   Un point, M, de coordonnées x et y, décrit (C).
   On pose $\varphi = \left(\overrightarrow{\mathrm{O}x},\ \overrightarrow{\mathrm{JM}}\right)$.
   Calculer, en fonction de a et φ, les coordonnées de M.
   Former l'équation de la tangente en M à (C).
   En général, cette tangente coupe Ox en un point, T, dont on demande de calculer l'abscisse, X, en fonction de a et φ.
   En déduire l'expression de $z = \dfrac{\mathrm{X}}{a}$ en fonction de $t = \mathrm{tg}\dfrac{\varphi}{2}$.
2. Étudier la fonction définie par $t \longmapsto z$ et tracer sa courbe représentative, (Γ), dans un plan rapporté a un repère orthonormé $t'\omega t,\ z'\omega z$.
   Résoudre graphiquement l'équation
   $$(4+m)t^2 + 8t + 6 - m = 0,$$
   dans laquelle t est l'inconnue et m un paramètre.
   Discuter suivant les valeurs de m.
   Expliquer géométriquement les résultats obtenus.
3. Montrer qu'il est possible de déterminer trois nombres réels constants, u, v, w, tels que l'on ait
   $$z = u + \frac{v}{t-1} + \frac{w}{t+1}.$$
   Évaluer l'aire du domaine limité par (Γ), l'axe $t'\omega t$ et les droites d'équations $t = 2$, $t = 3$.
4. Considérant à nouveau la figure construite à la question **1.**, on désigne par S le conjugué harmonique de T par rapport à A et B.
   Montrer que, lorsque M décrit le cercle (C), MS passe par un point fixe, I, dont on calculera les coordonnées.
   Quel est l'ensemble décrit par le point d'intersection, K, de JT et MS ?
   Montrer que la perpendiculaire en K à OK reste tangente à une courbe fixe, dont on indiquera la nature.