Métropole-Europe-Afrique-Orient-Inde

Les candidats traitent deux exercices. Ceux de la série S traitent les exercices numéros 1 (Triangles à côtés entiers) et 2 (Premières fois),
les autres traitent les exercices numéros 1 (Triangles à côtés entiers) et 3 (AGADADAGA).

Exercice 1. Triangles à côtés entiers

On dit qu'un triangle est un triangle entier si les longueurs de ses 3 côtés sont des entiers naturels non nuls. On rappelle la propriété dite de l'« inégalité triangulaire » : dans tout triangle non aplati la longueur de chacun des côtés est strictement inférieure à la somme des longueurs des deux autres.

1. **a.** Parmi les triplets suivants $(x\,;y\,;z)$, expliquer lequel désigne les longueurs des côtés d'un triangle entier non aplati, puis comment tracer ce triangle et avec quels outils :

$$(4\,;4\,;5) \qquad (3\,;6\,;9) \qquad (2\,;2\,;6)$$

   b. Quelles sont les valeurs possibles de l'entier z si $(15\,;19\,;z)$ désigne les longueurs des trois côtés d'un triangle entier non aplati rangées par ordre croissant de taille ?

   c. Étant donné trois entiers naturels non nuls x, y et z tels que $x \leqslant y \leqslant z$, quelle condition faut-il ajouter pour que le triplet $(x\,;y\,;z)$ désigne les longueurs des côtés d'un triangle entier non aplati ?

2. Soit un p entier naturel non nul. On désigne par E_p l'ensemble des triplets

d'entiers naturels *rangés par ordre croissant* $x \leqslant y \leqslant z$ et désignant les côtés d'un triangle entier non aplati dont le périmètre est égal à p.

Ainsi obtiendrait-on $E_9 = \{(1\,;4\,;4),(2\,;3\,;4),(3\,;3\,;3)\}$.

a. Si le triplet appartient à E_{18} quelles sont les valeurs maximale et minimale pour z ?

b. Donner la composition de E_{18} et représenter dans un repère orthonormé l'ensemble des couples pour lesquels il existe un entier naturel z tel que $(x\,;y\,;z) \in E_{18}$.

Vérifier que ces couples se situent à l'intérieur ou sur les bords d'un triangle dont les sommets ont des coordonnées entières.

3. **a.** Justifier que si $(x\,;y\,;z) \in E_p$ alors $(x+1\,;y+1\,;z+1) \in E_{p+3}$.

b. Soit $(x\,;y\,;z) \in E_{p+3}$. Déterminer une condition sur $(x\,;y\,;z)$ pour que $(x-1\,;y-1\,;z-1) \in E_p$.

c. En déduire que si p est impair alors E_p et E_{p+3} ont le même nombre d'éléments.

4. Étude de E_{2019}.

a. E_{2019} contient-il un triplet $(x\,;y\,;z)$ correspondant à un triangle équilatéral ?

b. E_{2019} contient-il des triplets $(x\,;y\,;z)$ correspondant à des triangles isocèles non équilatéraux ? Si oui combien ?

c. Montrer que si E_{2019} contient un triplet $(x\,;y\,;z)$ correspondant à un triangle rectangle alors

$$2019^2 = 4\,038(x+y) - 2xy.$$

En déduire que ne contient pas de triangle rectangle.

5. Dans cette question on se propose de dénombrer E_{2019}.

a. Soit $(x\,;y\,;z) \in E_{2022}$. On rappelle que $x \leqslant y \leqslant z$. Justifier que $x+y \geqslant 1\,012$ et $x+2y \leqslant 2\,022$.

b. Réciproquement, montrer que si $x \leqslant y$, $x+y \geqslant 1\,012$ et $x+2y \leqslant 2\,022$ alors $(x\,;y\,;2\,022-x-y) \in E_{2022}$.

c. Justifier que, dans un repère orthonormé, l'ensemble des couples d'entiers naturels $(x\,;y)$ tels que $x \leqslant y$, $x+y \geqslant 1\,012$ et $x+2y \leqslant 2\,022$ constitue l'ensemble des points à coordonnées entières d'un triangle qui est rectangle. En déterminer l'aire ainsi que le nombre de points à coordonnées entières situés sur ses côtés.

d. On admet le théorème de Pick :

Théorème de Pick

Si un polygone P est tel que tous ses sommets sont à coordonnées entières dans un repère orthonormé alors son aire A est donnée par la formule $A = i + \dfrac{j}{2} - 1$

où i désigne le nombre de points à coordonnées entières situés à l'intérieur de P et j le nombre de ceux situés sur les côtés de P

En déduire le nombre de triplets de E_{2022} puis celui de E_{2019}.

6. Une solution algorithmique

De manière générale, concevoir un programme (à retranscrire sur sa copie) permettant d'énumérer et de dénombrer E_p. Le tester sur E_{2022} et sur E_{2019}

Exercice 2. Premières fois

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels. On rappelle qu'un nombre premier est un entier naturel qui a exactement 2 diviseurs entiers naturels distincts : 1 et lui-même. Par exemple : 2, 3 et 5 sont premiers alors que 0, 1 et 6 ne le sont pas.

Décomposition en produit de facteurs premiers

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ il existe un unique entier naturel k, une unique liste de nombres premiers distincts rangés dans l'ordre croissant $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k$ et une unique liste d'entiers naturels non nuls $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_k$ tels que :

$$n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \ldots \times p_k^{\alpha_k}$$

On écrit, par exemple, $72 = 2^3 \times 3^2$ (ici $k = 2$), ou $32 = 2^5$ (dans ce dernier exemple, $k = 1$). La décomposition en produit de facteurs premiers d'un nombre premier p s'écrit simplement $p = p^1$.

Une fonction agissant sur les nombres entiers naturels

On souhaite savoir s'il est possible de considérer une fonction $\Delta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ possédant les propriétés suivantes :

Propriété (1) : $\Delta(0) = \Delta(1) = 0$;

Propriété (2) : Pour tout entier premier p, $\Delta(p) = 1$;

Propriété (3) : Pour tous entiers naturels a et b : $\Delta(a \times b) = \Delta(a) \times b + a \times \Delta(b)$

1. Soit p un nombre premier. Les propriétés précédentes permettent-elles d'exprimer $\Delta(p^2)$? $\Delta(p^3)$? Un entier naturel n étant donné, quelle est l'image par de $\Delta(p^n)$?

2. **a.** Soit p et q des nombres premiers distincts, m et n des entiers naturels supérieurs ou égaux à 1. Les propriétés précédentes permettent-elles d'exprimer $\Delta(p^m \times q^n)$?

b. Le nombre $\Delta(10^n)$ est-il un multiple de 7 pour $n \geqslant 1$?

3. À tout nombre entier $n \geqslant 2$, dont la décomposition en produit de facteurs premiers s'écrit :

$$n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \ldots \times p_k^{\alpha_k}$$

on associe les quotients q_1 de n par p_1, q_2 de n par $p_2 \ldots$, q_k quotient de n par p_k.

a. Montrer que si $n \geqslant 2$ alors, $\Delta(n) = \alpha_1 \times q_1 + \alpha_2 \times q_2 + \alpha_3 \times q_3 + \cdots + \alpha_k \times q_k$.

b. Vérifier que l'expression ainsi obtenue satisfait les propriétés (2) et (3) ci-dessus.

Étude de quelques images d'entiers par la fonction Δ

4. **a.** Calculer $\Delta(12)$, $\Delta(56)$, $\Delta(1\,001)$.

b. Quelles sont les solutions de l'équation $\Delta(x) = 0$?

c. Quelles sont les solutions de l'équation $\Delta(x) = 1$?

d. Tout entier naturel n a-t-il au moins un antécédent par Δ ?

e. Est-il vrai que, pour tout entier naturel n, $\Delta(n) \leqslant n$?

5. **a.** Montrer que si p et q sont des nombres premiers alors $\Delta(p \times q) = p + q$.

b. Est-il vrai que pour tous entiers naturels a et b : $\Delta(a \times b) = a + b$?

6. **a.** Est-il vrai que pour tous entiers naturels a et b : $\Delta(a + b) = \Delta(a) + \Delta(b)$?

b. Soient a et b deux entiers naturels tels que $\Delta(a + b) = \Delta(a) + \Delta(b)$ et un entier naturel quelconque k. Montrer que : $\Delta(ka + kb) = \Delta(ka) + \Delta(kb)$.

Les points fixes de la fonction

7. **a.** Soit p un nombre premier. Soit m un entier naturel. On suppose que m est un multiple de p^p. Montrer que dans ce cas, $\Delta(m)$ est aussi un multiple de p^p.

b. Soit n un entier naturel et p un nombre premier. Soit α l'exposant de p dans la décomposition en produit de facteurs premiers de n. On suppose que $\alpha \geqslant 1$. Montrer que si $\alpha < p$, alors est $\alpha - 1$ est l'exposant de p dans la décomposition en produit de facteurs premiers de $\Delta(n)$.

8. Résoudre l'équation $\Delta(x) = x$.

Exercice 3. AGADADAGA

Dans cet exercice, on appellera *mot* toute suite de lettres formée des lettres A, D et G. Par exemple : ADD, A, AAADG sont des *mots*.
Astrid possède un logiciel qui fonctionne de la manière suivante : un utilisateur entre un *mot* et, après un clic sur EXÉCUTER, chaque lettre A du *mot* (s'il y en a) est remplacée par le *mot* AGADADAGA. Ceci donne un nouveau mot.
Par exemple, si l'utilisateur rentre le *mot* AGA, on obtient le mot AGADADAGAGAGADADAGA. Un deuxième clic sur EXÉCUTER réitère la transformation décrite ci-dessus au nouveau mot, et ainsi de suite.

1. Quels sont les *mots* qui restent inchangés quand on clique sur EXÉCUTER ?

Traitement de texte

Astrid rentre le *mot* A.

2. Quel *mot* obtient-elle après avoir cliqué deux fois sur EXÉCUTER ?

3. Combien de clics au minimum faut-il pour obtenir un *mot* contenant un milliard de A ?

4. Après 20 clics, combien le *mot* obtenu contient-il de lettres D ?

Motif

Astrid souhaite maintenant dessiner un motif sur une feuille de papier quadrillé, en utilisant le dernier *mot* obtenu par le logiciel. Pour cela, elle lit de gauche à droite chaque lettre de ce *mot* et trace une ligne brisée sans lever le stylo en suivant les consignes suivantes :

- Le point de départ de la ligne est une croix située sur un nœud du quadrillage ;
- si la lettre lue est A, elle trace horizontalement et de gauche à droite un segment de longueur un carreau ;
- si la lettre lue est G, elle tourne la feuille d'un quart de tour dans le sens des aiguilles d'une montre ;
- si la lettre lue est D, elle tourne la feuille d'un quart de tour dans le sens inverse des aiguilles d'une montre ;
- quand toutes les lettres sont lues, elle remet la feuille dans la position initiale pour regarder le motif obtenu.

Par exemple, le motif obtenu à partir du *mot* ADAAGA est représenté sur la figure I.1.

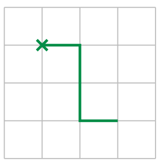

Figure I.1: *Représentation de du mot ADAAGA*

5. Astrid a réalisé le motif de la figure I.2. Quel *mot* avait-elle obtenu ?

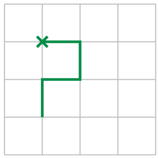

Figure I.2: *Motif d'Astrid*

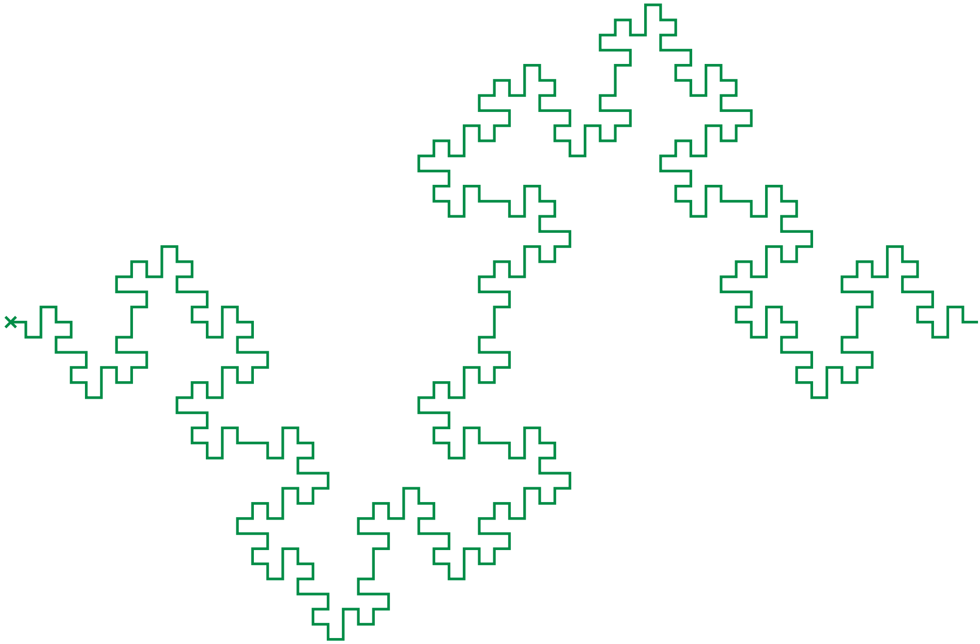

Figure I.3: *Motif obtenu par Astrid après avoir oublié le mot*

6. Astrid entre le *mot* A et clique deux fois sur EXÉCUTER. Dessiner le motif obtenu.

7. Astrid reprogramme le logiciel et remplace le *mot* AGADADAGA par un autre *mot* dont elle ne se souvient plus. Elle rentre le *mot* A et obtient le motif ci-dessous après avoir cliqué trois fois sur EXÉCUTER. Quel est le *mot* oublié par Astrid ?

8. On s'intéresse dans cette question uniquement aux motifs obtenus à partir de *mots* qui commencent par la lettre A, et se poursuivent en juxtaposant des séquences GA ou DA. On appelle largeur du motif le nombre de carreaux compris entre les points les plus à gauche et à droite du motif obtenu. Par exemple, la largeur du motif obtenu à partir du *mot* ADAGAGA est 2.

a. Quelle est la largeur du motif obtenu à partir du *mot* AGAGADA ?

b. Un *mot* conforme à l'hypothèse du 8. comporte dix lettres D et dix lettres G. Déterminer toutes les largeurs possibles du motif obtenu.