

∞ **Baccalauréat mathématiques élémentaires** ∞
Madagascar juin 1964

EXERCICE 1

a et b étant deux nombres entiers premiers entre eux, la fraction $\frac{a^2 + ab + b^2}{a - b}$ est-elle irréductible ?

EXERCICE 2

Étudier la fonction

$$y = \sqrt{x^2 + 4x - 4}$$

et tracer la ligne représentative dans un système d'axes orthonormé.
Reconnaître la nature de cette ligne.

EXERCICE 3

Soit un cercle fixe (C), de centre O, de rayon R , et un diamètre fixe AB. Soient (D) et (D') les tangentes au cercle respectivement aux points A et B.

La tangente en un point M de (C) coupe (D) et (D') respectivement en L et K et coupe la droite AB en T .

La droite AM coupe (D') en Q et la droite BM coupe (D) en P . Soit H le pied de la perpendiculaire issue de M sur AB.

1. Montrer que la division $TMLK$ est harmonique, que les droites MH , AK , BL sont concourantes en un point S et que S est le milieu de MH .
En déduire que les points L et K sont les milieux de AP et BQ et que la droite PQ passe par T .
En déduire, quand M est variable, l'enveloppe de TS .
Déterminer le point où cette droite touche son enveloppe. Même question pour PQ : enveloppe, point de contact V .
2. Soient (Γ) le cercle de diamètre PQ et de centre ω et P' le point où AP recoupe (Γ). Montrer que $\overline{AL} \cdot \overline{BK} = R^2$ et calculer les puissances de A, B et O par rapport à (Γ).
En déduire que (Γ) appartient à un faisceau linéaire de cercles à points limites F et F' . Que dire de ces points et du lieu de V ?
3. Définir la transformation ponctuelle faisant correspondre les lieux de V et de S .
Quels sont le pôle de PQ et la polaire de V par rapport à (C) ?
Définir une autre transformation faisant correspondre les lieux de V et de S .

N. B. - La question 3. est indépendante de la question 2.