Baccalauréat C Madagascar juin 1968

Exercice 1

Les nombres dix et onze du système décimal sont représentés respectivement par α et β.
Montrer, sans passer par l'intermédiaire du système décimal, que le nombre qui s'écrit $\overline{\alpha 040\beta}$ dans le système à base douze est divisible par onze.
Écrire ce nombre dans le système à base dix.

Exercice 2

Résoudre l'inéquation

$$\log_2 2x > 1 + \log_8 (3x+2).$$

Exercice 3

PREMIÈRE PARTIE

Le plan étant rapporté à un repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$, O étant l'origine, $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ respectivement les vecteurs unitaires des axes $x'\text{O}x,\ y'\text{O}y$, on définit la transformation ponctuelle T du plan de la façon suivante : tout point m du plan, de coordonnées $(x\ ;\ y)$, est transformé par T en le point M de coordonnées $(X\ ;\ Y)$ telles que

$$(1) \qquad \left\{\begin{array}{lcl} X &=& x+3y,\\ Y &=& 3x+y \end{array}\right.$$

et l'on note cette transformation

$$m \xrightarrow{T} M = T(m).$$

Étude de la transformation T

1. **a.** Tout point du plan a-t-il un transformé par T ?
   b. Tout point du plan est-il transformé par T d'un point unique du plan ?
   En déduire que la transformation T est une application bijective du plan sur lui-même.
   Écrire les relations (2), analogues aux relations (1), qui définissent T^{-1}, transformation réciproque de T, c'est-à-dire, on le rappelle, telle que

   $$T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = U,$$

   où U désigne la transformation identique du plan sur lui-même. (On rappelle que $g \circ f$ est le produit de l'application f par l'application g.)
   c. La transformation T admet-elle des points doubles ?
2. **a.** Dans l'ensemble des points du plan, on définit la loi de composition interne suivante, notée (+) : à deux points quelconques, a et b, du plan, on fait correspondre le point unique c défini par $\overrightarrow{\text{O}c} = \overrightarrow{\text{O}a} + \overrightarrow{\text{O}b}$ et l'on note $c = a + h$. On a donc

   $$(c = a+b) \iff \left(\overrightarrow{\text{O}c} = \overrightarrow{\text{O}a} + \overrightarrow{\text{O}b}\right).$$

   Montrer que $T(a+b) = T(a) + T(b)$.

b. Dans l'ensemble des points du plan, on définit la loi de composition externe suivante, notée multiplicativement : à tout couple $(\lambda,\ a)$, où λ est un nombre réel et a un point du plan, on fait correspondre le point unique b défini par $\overrightarrow{\mathrm{O}b} = \lambda\overrightarrow{\mathrm{O}a}$ et l'on note $b = \lambda a$.
On a donc

$$(b = \lambda a) \iff \left(\overrightarrow{\mathrm{O}b} = \lambda\overrightarrow{\mathrm{O}a}\right).$$

Montrer que $T(\lambda a) = \lambda T(a)$, puis que $T(\lambda a + \mu b) = \lambda T(a) + \mu T(b)$, où λ et μ sont des nombres réels.

c. Montrer que l'ensemble des points du plan muni des deux lois de composition définies ci-dessus a une structure d'espace vectoriel sur le corps des réels.

3. Montrer que le barycentre, m, d'un système de n points, $a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n$ affectés respectivement de coefficients réels, $\lambda_1\lambda_2,\ \dots,\ \lambda_n$' dont la somme n'est pas nulle, est défini par l'égalité

$$m = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n}\left(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n\right).$$

En déduire que l'image par T du barycentre de n points est le barycentre des images par T de ces n points.
En particulier, en utilisant le fait que tout point m d'une droite déterminée par deux points, a et b, peut être considéré comme le barycentre de ces deux points affectés de coefficients convenables, en déduire que :

— la transformée par T d'une droite est une droite;
— la transformée par T du milieu d'un segment ab est le milieu du segment AB, où $A = T(a)$ et $B = T(b)$;
— la transformée par T d'une division harmonique est une division harmonique.

4. Existe-t-il des points m et des nombres réels λ tels que

$$M = T(m) = \lambda m?$$

Montrer que l'ensemble des points m possédant cette propriété est constitué de deux droites passant par O.

5. a. b étant un point du plan, distinct de O, et a un point quelconque du plan, montrer que tout point m de la droite passant par a et parallèle à Ob peut être caractérisé par l'égalité $m = a + \rho b$, où ρ est un nombre réel.
Quelle est la direction de la transformée par T de cette droite ?

b. Soit (C) la courbe, ensemble des points m du plan tels que $\overrightarrow{\mathrm{O}m} = \overrightarrow{F(u)}$, où u est une variable réelle et où $\overrightarrow{F(u)}$ est le vecteur de composantes $f(u)$ et $g(u)$, f et g étant deux fonctions numériques dérivables de la variable réelle u.
Déduire de la partie a de cette question 5 que, si (C) admet une tangente, mt, en m, sa transformée $\left(C'\right)$ par T admet une tangente, MT, en M, transformée de mt.

SECONDE PARTIE

On suppose, dans toute cette partie, que le repère $\left(O\,;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ *est orthonormé.*

1. On considère le nouveau repère $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath_1},\ \overrightarrow{\jmath_1}\right)$, $\overrightarrow{\imath_1}$ et $\overrightarrow{\jmath_1}$ étant définis par

$$\left\{\begin{array}{lcl}\overrightarrow{\imath_1} & = & \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath}\right) \quad \text{et}\\ \overrightarrow{\jmath_1} & = & \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(-\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath}\right)\end{array}\right.$$

Montrer que ce nouveau repère est orthonormé et que l'on passe de $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ à $\left(\text{O},\ \vec{\imath_1},\ \vec{\jmath_1}\right)$ par une transformation simple, que l'on caractérisera.

2. Soit m le point du plan de coordonnées $(x_1\ ;\ y_1)$ dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath_1},\ \vec{\jmath_1}\right)$.
Quelles sont les coordonnées de $M = T(m)$ dans ce même repère ?
En déduire que $T = I \circ J = J \circ I$, où I et J sont deux affinités orthogonales ayant pour axes respectifs ceux du repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath_1},\ \vec{\jmath_1}\right)$ et dont on précisera les rapports.
Montrer que l'on peut également écrire

$$T = H_1 \circ I' = I' \circ H_1 = H_2 \circ J' = J' \circ H_2,$$

où H_1 et H_2 sont deux homothéties de centre O, dont on précisera les rapports, et I' et J' deux affinités orthogonales ayant pour axes ceux du repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath_1},\ \vec{\jmath_1}\right)$ et dont on précisera les rapports.

3. On donne, dans le plan, le cercle (Ω) de centre ω de rayon R, où ω est un point donné du plan et R un nombre réel positif donné.
Quelle est la nature de la courbe $T(\Omega)$, transformée par T du cercle (Ω) ?
Préciser la direction de ses axes.
Quelle relation existe-t-il entre le centre de (Ω) et celui de $T(\Omega)$?
(On pourra utiliser les résultats de la question 2 de la seconde partie.)

4. Soit p et q deux points fixes du plan, symétriques par rapport à O et n'appartenant pas aux axes des affinités précédentes. On considère le faisceau linéaire de cercles (F) ayant pour points limites p et q.

a. Montrer que l'ensemble, noté $T(F)$, des transformés des cercles du faisceau (F) est une famille d'ellipses ayant toutes les mêmes directions d'axes et la même excentricité.
Quel est l'ensemble des centres de ces ellipses ?
En utilisant T^{-1} montrer que, par tout point M du plan n'appartenant pas à une droite (Δ) passant par O, que l'on caractérisera, il passe une ellipse et une seule de la famille $T(F)$, ellipse dont on construira les sommets.
Montrer que chaque ellipse de $T(F)$ coupe la droite PQ, où $P = T(p)$ et $Q = T(q)$, en deux points conjugués harmoniques par rapport à P et Q.

Montrer que par tout point M appartenant à (Δ) passent deux tangentes à chacune des ellipses de la famille $T(F)$ et que les droites joignant les points de contact des deux tangentes ainsi obtenues passent par un point fixe.