Baccalauréat C Madagascar octobre 1968

I

Soit E, F et G trois ensembles, f une application de E dans F et g une application de F dans G.
On considère l'application h de E dans G, composée des deux applications f et g ($h = g \circ f$).

1. Montrer que, si h est injective, f est injective et que si, de plus, f est surjective, alors g est injective.
2. Montrer que, si h est surjective, g est surjective et que si, de plus, g est injective, alors f est surjective.

II.

Déterminer les couples $(x\,;\,y)$ d'entiers naturels, où x et y sont premiers entre eux, vérifiant la relation

$$\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}=\frac{8}{73}.$$

(On pourra chercher à déterminer $S = x+y$ et $P = xy$.)

III.

Nota. - Les parties A et B sont indépendantes, mais la partie C utilise les résultats obtenus dans ces deux parties.

Partie A

On considère, dans un plan rapporté à un repère orthonormé Ox et Oy, les deux points I$(\alpha\,;\,\beta)$ et J$(-\alpha\,;\,-\beta)$; on suppose $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.
Démontrer que l'ensemble constitué des points I et J et des points M du plan tels que

$$(\mathrm{O}x, \mathrm{IM}) = -(\mathrm{O}x, \mathrm{JM}) \pmod{\pi}$$

est l'hyperbole équilatère d'asymptotes Ox et Oy et passant par les points I et J.

Partie B

Soit I et J deux points du plan et O le milieu du segment IJ.
On considère un cercle $\left(\Gamma'_1\right)$ appartenant à l'ensemble des cercles du faisceau linéaire à points limites I et J et deux points, A et B, de ce cercle tels que la droite AB ne soit ni parallèle ni perpendiculaire à IJ.
On appelle (Γ_A) et (Γ_B) les cercles du faisceau linéaire à points de base I et J passant respectivement par A et B. La droite AB recoupe (Γ_A) en C et (Γ_B) en D.

1. Que deviennent les cercles du faisceau à points limites I et J et les cercles du faisceau à points de base I et J quand on les transforme par une inversion de pôle I et de puissance IJ^2 ?
   A$'$, B$'$, C$'$ et D$'$ étant les inverses respectifs de A, B, C et D dans cette inversion, démontrer que JC$'$ = JD$'$ et en déduire que les points C et D appartiennent à un même cercle $\left(\Gamma'_2\right)$ du faisceau à points limites I et J.
2. La droite ABCD coupe la droite IJ en K et la médiatrice de IJ en K$'$.
   Montrer que l'un de ces points est un centre d'homothétie de $\left(\Gamma'_1\right)$ et $\left(\Gamma'_2\right)$ et que l'autre est un centre d'homothétie de (Γ_A) et (Γ_B).
   En déduire que les angles de droites (BI, BJ) et (CI, CJ) ont mêmes directions de bissectrices, ainsi que les angles (AI, AJ) et (DI, DJ).

Partie B

En utilisant les résultats de la partie A et de la partie B, démontrer qu'il existe une hyperbole équilatère, (H_1) de centre O, passant par les quatre points I, J, B et C et une hyperbole équilatère (H_1), de centre O, passant par les quatre points I, J, A et D.