Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Madagascar septembre 1969 ∽

EXERCICE 1

Soit les ensembles $\text{E} = [-1\ ;\ +1]$ et $\text{E}^\star = [-1\ ;\ +1] - \{0\}$.
On considère la fonction f définie pour $x \in \text{E}^\star$ par

$$f(x) = x^2 \text{Log}|x| - 1$$

et $f(0) = a$, où a est un nombre réel donné.

1. Est-il possible de choisir a pour que f soit continue sur E ?
   Dans l'affirmative, montrer que f a alors une fonction dérivée f' continue sur E.
2. Étudier les variations et construire le graphe (C) de f dans un repère orthogonal.

EXERCICE 2

On pose $u = 2 + \sqrt{3}$ et $v = 2 - \sqrt{3}$.

1. Démontrer par récurrence que, n désignant un entier positif, on peut écrire

$$u^n = a_n + b_n\sqrt{3}, \quad v^n = a_n - b_n\sqrt{3}$$

   où a_n et b_n sont des entiers positifs.
   Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
2. Établir les égalités

$$a_n^2 - 3b_n^2 = 1 \quad \text{et} \quad a_n.b_{n+1} - a_{n+1}.b_n = 1.$$

   En déduire que les fractions

$$\frac{a_n}{b_n}, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n}, \quad \frac{b_{n+1}}{b_n} \text{ sont irréductibles.}$$

PROBLÈME

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $x'\text{O}x$, $y'\text{O}y$, on donne les points a et b sur Ox, d'abscisses respectives $-\sqrt{2}$ et $+\sqrt{2}$.
On se propose d'étudier la transformation ponctuelle T qui à un point m du plan associe le point m' défini de la façon suivante :
– si m n'est pas situé sur la droite ab, les points a, b, m, m' sont cocycliques et les pôles des droites ab et mm' par rapport au cercle (C) circonscrit au triangle abm sont conjugués par rapport à (C) ;
– si m appartient à la droite ab, m' est l'inverse de m dans l'inversion de pôle O et de puissance 2.

Partie A

1. Évaluer le produit $\text{O}m \cdot \text{O}m'$. (On pourra introduire le deuxième point d'intersection m' de Om avec le cercle passant par a, b et m.)
   En déduire que T peut être considérée de deux manières comme le produit commutatif de deux transformations simples, que l'on précisera. T est-elle involutive ?

2. Déterminer les coordonnées x' et y' de m' en fonction des coordonnées x et y de m.
   Quels sont les points doubles de T ?

Partie B Étude de l'image d'un cercle ou d'une droite

1. Déterminer l'image d'un cercle (C) passant par a et b. Montrer géométriquement et analytiquement l'existence d'une famille de cercles invariants centrés sur Ox.
2. Déterminer les droites invariantes par T.
3. Soit (ω) le cercle de centre $\omega(\beta\ ;\ 0)$, $|\beta| \geqslant \sqrt{2}$, orthogonal au cercle (γ) de diamètre ab.
   Écrire sous forme normale l'équation de la tangente (U) en un point m de (ω).
   Discuter la nature de $(U') = T(U)$.
   Déterminer l'ensemble (H) des centres de (U') quand m décrit (ω). Préciser les éléments de cet ensemble. Cas particuliers.

Partie C

À chaque point m de coordonnées $(x\ ;\ y)$, on associe le nombre complexe $z = x + \text{i}y$ qui est l'affixe du point m.
Exprimer l'affixe $z' = x' + \text{i}y'$ de $m' = T(m)$ en fonction de z, soit $z' = f(z)$.
On considère dans le corps $\mathbb{C}$ l'application g telle que $g(z) = z - 1$ et l'application h définie par

$$h(z) = z + 1.$$

Soit T' la transformation ponctuelle du plan $x\text{O}y$ qui associe au point m d'affixe z le point p d'affixe

$$Z = h \circ f \circ g(z).$$

1. Existe-t-il des points qui n'ont pas de transformés ?
   T' est-elle involutive ?
2. Déterminer les points doubles, ainsi que les images des droites passant par O et des cercles centrés en O.