

☞ Baccalauréat - Madagascar juin 1951 ☞

SÉRIE MATHÉMATIQUES

I

1^{er} sujet

Correspondance par inversion entre deux cercles d'un même plan ; signes des puissances d'inversion convenables.

2^e sujet

Conservation des angles de courbes par inversion plane. Application : transformation par inversion de la figure formée par un cercle et ses diamètres.

3^e sujet

Construction de la polaire d'un point par rapport à un cercle avec la règle seule ; la justifier.

II

Dans un plan P, où sont tracées toutes les figures, on donne un cercle (O) de centre O et de rayon R et un axe $x'x$ passant par O ; soit I le point de $x'x$ tel que

$$\overline{OI} = x \quad (-R < x < R).$$

Deux droites constamment orthogonales Δ et Δ' varient en passant toujours par I ; Δ coupe (O) en A et C, Δ' en B et D ; on placera A, B, C, D de façon que le sens de parcours ABCD soit le sens trigonométrique. Soit M le milieu du segment AB.

1. Calculer $\overline{MO}^2 + \overline{MI}^2$ en fonction de R seul.

En déduire le lieu des milieux des côtés du quadrilatère convexe ABCD et l'enveloppe de ces côtés.

2. Soient E, F, G, H les pôles, par rapport à (O), des droites AB, BC, CD, DA respectivement ; en portant son attention sur les points M et E, montrer que le lieu des quatre points E, F, G, H est un cercle (ω) de centre ω et de rayon ρ .

Que peut-on dire sur les droites EF, FG, GH, HE ?

3. Calculer $\overline{O\omega}$ et ρ^2 en fonction de R et de x.

K étant le point de $x'x$ défini par $\overline{KO}^2 - R^2 = \overline{K\omega}^2 - \rho^2$, calculer $\overline{OK} = u$.

On trouvera

$$\overline{O\omega} = \frac{R^2 x}{x^2 - R^2}, \quad \overline{OK} = u = \frac{x^2 + R^2}{2x}.$$

Déduire des résultats précédents la puissance de K par rapport à (O) et le carré du segment KI.

Quels sont les points-limites du faisceau défini par (O) et (ω) ?

4. On pose $x = R \cos \varphi$. Étudier les variations de u lorsque φ varie (courbe représentative).
5. Calculer $(\overline{O\omega}^2 - \rho^2)^2 - 2R^2 (\overline{O\omega}^2 + \rho^2)$. Conclusion ?

N. B. - Les candidats sont autorisés à utiliser les résultats du 3. même s'ils ne les ont pas démontrés.