↜ Madagascar Baccalauréat mathématiques juin 1957 ↝

I. 1er sujet
Variations et représentation graphique de la fonction

$$y = \frac{x^2 - x + 1}{x}.$$

I. 2e sujet
Dérivée d'un produit de plusieurs fonctions ayant des dérivées.

I. 3e sujet
Dérivées de $\sin x$, $\cos x$, $\text{tg}\, x$, l'arc x étant exprimé en radians (on admettra le théorème sur la limite de $\dfrac{\sin x}{x}$ lorsque x tend vers zéro).

II.

1. Montrer que toute fraction décimale $\dfrac{A}{10^p} < 1$ peut s'écrire

$$\frac{A}{10^p} = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_p}{10^p}$$

les nombres a_1, a_2, a_p étant des entiers inférieurs à 10.
Comment A est-il formé au moyen de a_1, a_2, ..., a_p ?

2. a. n étant un entier donné supérieur à 1, on considère la somme de fractions

$$\alpha = \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \cdots + \frac{a_p}{n^p},$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_p$ sont des entiers inférieurs à n.
Démontrer que α est égale à une fraction $\dfrac{A}{n^p}$ inférieure à 1.

b. On se donne une fraction $\dfrac{A}{n^p} < 1$, A n'étant pas divisible par n. La division de A par n donne

$$(1) \qquad A = nA_1 + a_p;$$

prouver que $0 < a_p \leqslant n - 1$ et $A_1 < n^{p-1}$.
On obtient de même, en divisant A_1 par n,

$$(2) \qquad A_1 = nA_2 + a_{p-1};$$

prouver que $0 < a_{p-1} \leqslant n - 1$ et $A_2 < n^{p-2}$.
On divise A_2 par n et ainsi de suite.
Écrire les deux dernières identités ainsi obtenues [celle de rang $(p-1)$ et celle de rang p], ainsi que les conditions correspondantes pour a_2, A_{p-1} et $a_1 > A_p$.
Établir que les identités (1), (2), ..., (p) permettent d'obtenir une décomposition de A ayant la forme de la décomposition de $\dfrac{A}{n^p}$ donnée en **a.**

c. Quels sont les quotients de la division de A par n^2, de A par n^3, ..., de A par n^{p-1} ?
Prouver que, si $A < n^{p-1}$, on a $A_{p-1} = a_1 = 0$, que $A = n^{p-2}$ entraîne $a_1 = a_2 = 0$ et que, plus généralement, si $n^{p-q-1} < A < n^{p-q}$, on a $a_1 = a_2 = \ldots = a_q = 0$, $a_{q+1} \neq 0$.

d. Trouver la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fraction $\dfrac{a}{b}$ soit égale à une fraction $\dfrac{A}{n^p}$.

Application : La fraction $\dfrac{1}{16}$ peut se mettre sous la forme $\dfrac{1}{16} = \dfrac{A}{6^4}$.

En déduire, en utilisant **b.**, que l'on peut mettre $\dfrac{1}{16}$ sous la forme

$\dfrac{1}{16} = \dfrac{a_1}{6} + \dfrac{a_2}{6^2} + \dfrac{a_3}{6^3} + \dfrac{a_4}{6^4}$; puis montrer comment, en utilisant **c.**, on aurait pu affirmer *a priori* que $a_1 = 0$.

3. Soit une fraction $\dfrac{a}{b} < 1$ admettant un développement de la forme (α) du **2.** :

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \cdots + \frac{a_p}{n^p},\ \left(a_1, a_2, \ldots, a_p < n\right)$$

Démontrer les inégalités

$$\frac{a_2}{n} + \frac{a_3}{n^2} + \cdots + \frac{a_p}{n^{p-1}} < 1,\ \frac{a_3}{n} + \cdots + \frac{a_p}{n^{p-2}} < 1,$$

et ainsi de suite. En déduire que les valeurs approchées par défaut de $\dfrac{a}{b}$ à $\dfrac{1}{n}$, $\dfrac{1}{n^2}$ ... près sont respectivement

$$\frac{a_1}{n},\quad \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2}, \ldots$$

On rappelle que, si $\dfrac{q}{n}$ est la valeur approchée par défaut à $\dfrac{1}{n}$ près de $\dfrac{a}{b}$ on a $\dfrac{q}{n} \leqslant \dfrac{a}{b} < \dfrac{q}{n} + \dfrac{1}{n}$ et que, par suite, q est le quotient de la division de na par b.

N. B. - Il pourra être commode, pour établir les inégalités proposées, de remplacer a_1, a_2, ..., a_p par leur plus grande valeur possible, $n - 1$.