

∞ Baccalauréat Madagascar juin 1957 ∞
Série mathématiques

I. 1^{er} sujet

Variations et représentation graphique de la fonction

$$y = \frac{x^2 - x + 1}{x}.$$

I. 2^e sujet

Dérivée d'un produit de plusieurs fonctions ayant des dérivées.

I. 3^e sujet

Dérivées de $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, l'arc x étant exprimé en radians (on admettra le théorème sur la limite de $\frac{\sin x}{x}$ lorsque x tend vers zéro).

II.

- 1.** Montrer que toute fraction décimale $\frac{A}{10^p} < 1$ peut s'écrire

$$\frac{A}{10^p} = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_p}{10^p}$$

les nombres a_1, a_2, a_p étant des entiers inférieurs à 10.

Comment A est-il formé au moyen de $a_1, a_2, \dots, a_p$?

- 2. a.** n étant un entier donné supérieur à 1, on considère la somme de fractions

$$\alpha = \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \cdots + \frac{a_p}{n^p},$$

où $a_1, a_2, \dots, a_p$ sont des entiers inférieurs à n .

Démontrer que α est égale à une fraction $\frac{A}{n^p}$ inférieure à 1.

- b.** On se donne une fraction $\frac{A}{n^p} < 1$, A n'étant pas divisible par n . La division de A par n donne

$$(1) \quad A = nA_1 + a_p;$$

prouver que $0 < a_p \leq n - 1$ et $A_1 < n^{p-1}$.

On obtient de même, en divisant A_1 par n ,

$$(2) \quad A_1 = nA_2 + a_{p-1};$$

prouver que $0 < a_{p-1} \leq n - 1$ et $A_2 < n^{p-2}$.

On divise A_2 par n et ainsi de suite.

Écrire les deux dernières identités ainsi obtenues [celle de rang $(p-1)$ et celle de rang p], ainsi que les conditions correspondantes pour a_2 , A_{p-1} et $a_1 > A_p$.

Établir que les identités (1), (2), ..., (p) permettent d'obtenir une décomposition de A ayant la forme de la décomposition de $\frac{A}{n^p}$ donnée en **a**.

- c.** Quels sont les quotients de la division de A par n^2 , de A par n^3 , ..., de A par n^{p-1} ?
 Prouver que, si $A < n^{p-1}$, on a $A_{p-1} = a_1 = 0$, que $A = n^{p-2}$ entraîne $a_1 = a_2 = 0$ et que, plus généralement, si $n^{p-q-1} < A < n^{p-q}$, on a $a_1 = a_2 = \dots = a_q = 0$, $a_{q+1} \neq 0$.
- d.** Trouver la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fraction $\frac{a}{b}$ soit égale à une fraction $\frac{A}{n^p}$.

Application : La fraction $\frac{1}{16}$ peut se mettre sous la forme $\frac{1}{16} = \frac{A}{6^4}$.

En déduire, en utilisant **b**., que l'on peut mettre $\frac{1}{16}$ sous la forme

$\frac{1}{16} = \frac{a_1}{6} + \frac{a_2}{6^2} + \frac{a_3}{6^3} + \frac{a_4}{6^4}$; puis montrer comment, en utilisant **c**., on aurait pu affirmer *a priori* que $a_1 = 0$.

- 3.** Soit une fraction $\frac{a}{b} < 1$ admettant un développement de la forme (α) du **2**. :

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \dots + \frac{a_p}{n^p}, \quad (a_1, a_2, \dots, a_p < n)$$

Démontrer les inégalités

$$\frac{a_2}{n} + \frac{a_3}{n^2} + \dots + \frac{a_p}{n^{p-1}} < 1, \quad \frac{a_3}{n} + \dots + \frac{a_p}{n^{p-2}} < 1,$$

et ainsi de suite. En déduire que les valeurs approchées par défaut de $\frac{a}{b}$ à $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$, ... près sont respectivement

$$\frac{a_1}{n}, \quad \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2}, \dots$$

On rappelle que, si $\frac{q}{n}$ est la valeur approchée par défaut à $\frac{1}{n}$ près de $\frac{a}{b}$ on a $\frac{q}{n} \leq \frac{a}{b} < \frac{q}{n} + \frac{1}{n}$ et que, par suite, q est le quotient de la division de na par b .

N. B. - Il pourra être commode, pour établir les inégalités proposées, de remplacer $a_1, a_2, \dots, a_p$ par leur plus grande valeur possible, $n-1$.