Madagascar juin 1962

SÉRIE MATHÉMATIQUES

I

1. On donne deux points A, ct B, et un nombre positif $k \neq 1$. Rappeler sans démonstration quel est le lieu des points M tels que MA = kMB.
2. On donne un cercle (C) et un point I extérieur. De I on mène les tangentes IT, IU (T et U étant les points de contact) et une sécante IAB à (C).
   Démontrer la relation
   $$\text{TA} \times \text{UB} = \text{UA} \times \text{TB}.$$
   On pourra utiliser le cercle de centre I et de rayon IT.
3. Quel est le lieu géométrique du point S de rencontre des tangentes en A et B au cercle (C) lorsque la sécante IAB varie, I restant fixe ?

II

On considère la fonction

$$y = \frac{x^2 - mx}{x^2 - 4x + 3}. \qquad (1)$$

1. Étudier les variations de la fonction correspondant à $m = 4$.
   Construire la courbe représentative et montrer qu'elle a un axe de symétrie.
2. Quelles sont les valeurs de m pour lesquelles la fonction (1) :
   a. n'admet ni maximum ni minimum ;
   b. admet un maximum et un minimum ;
   c. admet seulement un minimum ?
   Qu'y a-t-il de particulier si $m = 1$ ou $m = 3$ (l'étude des fonctions correspondantes n'est pas demandée) ?
3. Calculer en fonction de m les coordonnées du point A d'intersection de la courbe $(\mathscr{C}_m)$ représentant la fonction (1) et de son asymptote parallèle à l'axe $x'x$.
   Calculer les coordonnées du point B, autre que O et A, d'intersection de la courbe $(\mathscr{C}_m)$ et de la droite OA.
4. Calculer les coordonnées du point M, conjugué harmonique de O par rapport aux points A et B.
   Quel est le lieu géométrique de M ?
   En supposant connus les résultats de la question 3°, retrouver géométriquement le lieu de M.

N.-B. - Les trois premières parties sont indépendantes.